APOLLONIUS
AC
SERENUS
PROMOTUS

AUCTORE

BARTHOLOMÆO INTIERI

FLORENTINO

Ad Illuſtriſſimum, & Excellentiſſimum Dom.

D. HIERONYMUM

ONERUM CABANILIUM

E Comitibus Trojæ, & Montellæ,

Sancti Marci Marchionem, Ducem S. Johannis Rotundi, Rodi, Candelari, & S. Severi Dominum &c.

NEAPOLI, M.DCCIV.

Ex Typographia Leonardi-Joſephi Sellitto.

Superiorum Permiſſu.

7
167
309 1
Digitized by Google

Digitized by Google

Excellentiſſime Princeps.

PAulò poſtquam de inveniendis infinitis curvis methodum excogitavi, meditanti rem eandem iterato alia occurrit dilucidior, ac perpulcrior, ut aſſolet de uno in aliud inventum, ac de una in aliam veritatem mens noſtra progredi. Hanc tribus ab hinc menſibus excogitatam ne aliquantiſper lateret alios Geometriæ ama-

amatores, quæ mihi mens eſt, ſemperq; fuit, in publicam proferre lucem decrevi, contra quàm nonnullorum eſt ingenium, præſertim noſtri ævi, qui vel minimum, quod fortaſſis ſcirerentur, ſuis in præcordijs abdentes premere ſatagunt; quemadmodum pecuniarum avari, & vix ſibi tutas divitias credentes, quas ipſi ſoli norunt: atque id ea mente agunt, ne qua facilitas alijs proveniat ad quædam intelligenda, quæ non ſine magno labore ipſi intellexiſſe ducunt. res ſanè viro ingenuo, nedū literato indigna. Tibi nuncupatum volo, Excellentiſſime Princeps, hoc qualecumque eſt opuſculum eadem de cauſa, eodemque nomine, quo primum illud, quandoquidem gemelli videntur fœtus, & continuò fermè editi. Majora deberem pro tuis in me collatis jugiter beneficijs, proque animi benevolentia, quam teſta-

tam

tam mihi in dies facis, meamque qualemcumque doctrinam mirificè commendas, ſicuti nuper cum Illuſtriſſimo D. Paulo Matthia Doria lubentiſſimè egiſti, de meis laboribus, atque adinvẽtis verba faciens; à quo viro in Republica literaria optimè merito non ſine admiratione, ac humanitate, qua decet, fuere commendata. At hoc, quod exhibeo arrhæ inſtar eſt majorum, quæ polliceor, Deo conatibus meis annuẽte; quicquid enim è paupere ingenio meo prodiverit tibi jure merito omnes acceptum referent, à quo otium omne in hujuſmodi res incumbendi mihi partũ, ea qua ſolitus es largitate majorum tuorum munificentiæ æmulatrici in literatos viros, bonaſque artes excolendas, cujuſmodi etiam ingenij Excellentiſſimum Ducem CAROLUM ONERUM CABANILIUM *nobis genui-*

ſti

ſti præ reliquis natis tuis tecum, ut ita dicam, morum comitate, ac magnanimitate certantem, cui ferè quantum Tibi debeo, ac reliquæ tuæ domui. Is enim, ut & alij natu minores mei ſemper ſtudioſiſſimi, ſemperque hortatores uti novi quiddam ederem, benemereri quantum poſſent de re literaria cupientes. Quamobrem ſerves illos tui imitatores etiam, atque etiam oro, atque hoc titulo magis ames, quod bonarum artium amore flagrent. Vale.

Excellentiæ Tuæ

Neap. xv. Martii 1704.

Addictiſſimus Servus
Bartholomæus Intieri.

Digitized by Google

AMICE LECTOR

OPellam, quam tibi trado, non cupidine gloriæ adductus, neque ad meorum detractorum tela retundenda, Typis committere decrevi, ſed malui methodum tribus ab hinc menſibus de infinitarum Curvarum ſectionibus à nemine hactenus, quem ſciam, excogitatam indicare; præſertim, quia nunc temporis omnes ferè Geometriæ amore tenentur, cui nedum, at reliquis etiam diſciplinis noſter Excellentiſſimus PROREX, licèt variis, gravibuſque negotiis, tam exteris, quàm totius Regni occupatus inter horas ſuccifivas operam dare non dedignatur. Tanto autem Principi, ſi hæc accepta fuiſſe cognovero, ad alia animum appellam; & præcipuè ad omnibus numeris abſolvendum opuſculum de Æquationum conſtructione. Unum ſcias velim cuncta, quæ hic leguntur, toto cælo ab iis, quæ nuper in alio libello edidi differre, neque illa quippiam mihi contuliſſe ad hæc invenienda: propterea de iis ne ullum hic quidem verbum. Vale.

DEFINITIONES

(*Fig.* 1.)

SI' ab aliquo puncto, A, in ſublimi ad circumferentiam BHC recta linea ducatur AB, atque in utramque partem producatur, & manente puncto A, convertatur eadem AB circa circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri; Superficiem BACFE recta linea BAE deſcriptam, conſtantẽque ex duabus ſuperficiebus BAC, EAF, ad verticem A inter ſe aptatis, quarum utraque indefinitè augeri poteſt, voco *Conicam ſuperficiem*; & quidem, *Primam*, ſi circumferentia BHC hujus ſit naturæ, ut ducta qualibet perpendiculari, vel applicata IK ad diametrum BC continuè proportionales ſint BK, IK, KC. Hæc autem *Primus Circulus* vocetur.

Secundam verò *Superficiem Conicam* voco, ſi circumferentia BHC hujus naturæ fuerit, ut quadratum BK ad quadratum applicatæ IK eandem rationem habuerit, ac applicata IK ad KC. Hæc autem curva *Secundus circulus* vocetur.

Tertiam autem *Superficiem Conicam* voco, ſi circumferentia BHC hujuſmodi fuerit naturæ, ut cubus BK ad cubum applicatæ IK eandem habuerit rationem, quam *IK* ad KC. Hæc autem curva *Tertius Circulus* vocetur.

Quartam deniquè, & ita eodem modo in infinitum, voco *Conicam Superficiem*, ſi circumferentia BHC hujus naturæ fuerit, ut quadratoquadratum BK ad quadratoquadratum IK eandem habuerit rationẽ, ac eadem applicata I*K* ad *K*C. Hæc verò *Quartus Circulus* vocetur.

Idem dicendum, ſi ita fuerit BK ad applicatam KI, ut quadratum KI, ad quadratum KC; vel ita cubus IK ad

cubum KC, vel quadratoquadratum IK ad quadratoquadratum *K*C, & ita in infinitum.

Not. Vox circuli modò curvam, modò planum curva incluſum ſignificat.

SCHOLIVM.

QUomodo hæ curvæ deſcribi poſſint, demonſtravi in meo *Aditu*; verùm quia pollicitus ſum, nihil eorum, quæ à me in lucem edita ſunt, in medium allaturum, uti poterimus ad ipſarum deſcriptionem methodo à Carolo Renaldino tradita in ſuo Geometra Promoto. Quòd ſi cui illa Renaldini Methodus non arriſerit, non ideo ab his, quæ mox tradam, animum avertere debet, utpotè quæ his curvis egeant; quandoquidem his poſitis ingens ad novas curvas detegendas campus aperitur. Quin & maximi Geometræ hoc idem fecerunt; Huddenius etenim, referente Schootenio Miſcellaneorum ſectione 22, Solidum ſecavit, cujus geneſis longè hac difficilior exiſtit: mente enim illa tantùm concipi poteſt, non autem ad praxim revocari; quod in noſtris his curvis aſſumptis non accidit.

II.

Verticem cujuslibet voco manens punctum A.

III.

Axem rectam lineam DA, quæ per punctum A, & D, centrum curvæ BHC, tranſit.

SCHOLIVM.

SI curva BHC ſit primus, vel planus circulus, quid ſit centrum patet. In reliquis verò curvis punctum intelligo, quod bifariam dividit diametrum BC, ad quam ordinatim applicatur I*K*. Co-

I V.

Conum autem voco figuram ABC contentam ſuperficie plana BHCL, à curva BHCL incluſa, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & curvæ circumferentiam interjicitur. Et quidem *Primum Conum* voco, ſi curva BHCL fuerit primus circulus. *Secundum* verò *Conum*, ſi curva BHC fuerit ſecundus circulus. *Tertium Conum*, ſi curva fuerit tertius circulus. *Quartum* denique *Conum*, & ita deinceps, ſi eadem curva BHC fuerit quartus circulus.

V.

Baſim circulum ipſum, cujuſcumque generis ſit.

V I.

Conorum *rectos* voco, qui axes habent ad angulos rectos ipſis baſibus.

V I I.

Scalenos, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

V I I I.

(*Fig.* 2. & 3.)

Omnis curvæ lineæ, vel duarũ curvarum CAD, CBD in uno plano exiſtentium *Diametrum* voco rectam lineam FBAE, vel AE, quæ quidem ducta à linea curva CAD, vel à duabus curvis CAD, CBD, omnes lineas CD, quæ in ipſa, vel in ipſis curvis ducũtur cuidam lineæ AS, æquidiſtantes bifariam dividit.

Google

I X.

Verticem lineæ rectæ terminum A, qui eſt in ipſa curva CAD. Si duæ autem curvæ fuerint, *Vertices* puncta A,B, quæ ſunt in ipſis curvis, atque in ipſa diametro.

X.

Ordinatim ad diametrum *applicari* dicitur unaquæque æquidiſtantiarum linearum CE, DE.

X I.

Axem verò curvæ lineæ, & duarum curvarum rectam lineam, quæ cum ſit diameter curvæ lineæ, vel duarum curvarum æquidiſtantes ad rectos ſecat angulos.

In præſentiarum his tantùm definitionibus contentus fui, cum ob nimiam temporis anguſtiam curvas, quas modo tradam excolere, ut animus erat, non potuerim. Culpandus tamen ipſe non ſum, quippe qui omnia dicere non ſuſcepi, ſed geneſim tantùm curvarum, quas mox tradam. Puto tamen ingratum non feciſſe iis, quibus Geometria cordi eſt: hac ſiquidem methodo detecta ad altiora gradum facere quiſque proprio marte poteſt. Etenim, ut Carteſius ait (*lib.3.Geom.*) cognitis in materia Mathematicarum progreſſionum duobus, aut tribus prioribus terminis, reliquos invenire non eſt difficile.

PROPOSITIO I.

(*Fig.* 4.)

R*Ectę lineę AG, AG, quæ a vertice A, cujuſcumque ſuperficiei ad puncta G,G, quæ in ſuperficie conica ſunt, ducuntur; in ipſa ſuperficie erunt.*

Quo-

Quoniam enim puncta A, G ſunt in ſuperficie conica; idcirco recta ipſam deſcribens [*ex prima def. hujus*] trãſibit in ipſa coni deſcriptione per puncta G, G; adeoque vel ex ipſa coni generatione, liquet, rectam AG totam in ſuperficie conica exiſtere. Q. E. D.

Coroll. Rectæ à vertice ad puncta, quæ ſunt in ſuperficie conica, baſis circumferentiæ occurrent, ſi ulterius producantur.

PROPOSITIO II.

(*Fig.* 5.)

SI in alterutra ſuperficierum quarumlibet conicarũ, quæ ſunt ad verticem, ſumantur duo puncta D, E, & conjungantur recta linea DE; atque ex vertice ducantur rectæ AD, AE, occurrentes ipſi circumferentiæ baſis in punctis F, G, (coroll. p. hujus), *ita ut FG, quæ hæc puncta conjungit perpendicularis ſit ad diametrum BC; recta DE intra ſuperficiem tota cadit: quæ verò ultra hæc puncta producitur tota extra cadit.*

Quoniam enim FHG perpendicularis eſt ad diametrũ BC, tota intra circulum cadet, ac proinde intra ſuperficiem conicam: ergo (2.11.) intra conicam ſuperficiem eſt planum trianguli AFG, uti & DE in eodem plano ſita. Q.E.D. Quòd verò producta extra ſuperficiem cadat, ſatis in aperto eſt.

SCHOLIUM.

LAtius demonſtrari hæc propoſitio poteſt, cum verò quod demonſtratum fuit, ſatis ad ea, quæ ſequuntur, ſit, hæc in medium attuliſſe ſufficiat.

PRO-

PROPOSITIO III.

(*Fig.5.*)

SI *quilibet conus plano ABC per verticem A ſecetur, ſectio triangulum erit.*

Nam utraque AB, AC (1.*hujus*) poteſt concipi, tanquam recta linea ſuperficiem conicam deſcribens; item (3. 11.) BC eſt recta, utpotè quæ duorum planorum communis ſectio eſt, nempe circuli ſubjecti, & plani per axem ducti, ergo figura ABC, triangulum erit Q.E.D.

PROPOSITIO IV.

(*Fig.6*)

SI *alterutra ſuperficierum conicarum per verticem oppoſitarum ſecetur plano DFE æquidiſtante ipſi circulo BHC, per cujus periferiam fertur linea recta ſuperficiem conicam deſcribens, planum DFE, quod conica ſuperficie clauditur circulus erit, ejuſdem quidem generis, ac ille, qui eſt baſis coni, centrum verò V erit in coni axe AO.*

Sit conus ABC ſecundus, & ſecetur plano ABC per axem, & per diametrum BC, ſectio triangulum erit (3. *hujus*); tum in ſectione DFE ſumatur quodlibet punctum F; junctaque AF producatur [*corol.* 1.*hujus*] uſque dum occurrat circumferentiæ baſis in puncto H. Per rectas autem AB, AH, planum ducatur ABH, ſecans baſis planum recta (3. 11.) BH, planum verò DFE recta DF. Item per rectas AH, AC planum ducatur, ſecans baſis planum [3.11.] recta HC, planum verò DFE recta linea FE. Quoniam itaque (16. 11.) CB ipſi DE, BH ipſi DF, & CH ipſi FE parallela eſt, ergo triangulum BHC (10.11. & 4.6.) triangulo DFE ſimile erit; ductiſque HL ad BC, & FI ad DE perpendicularibus, ſimile erit triangulum

BHL

BLH triangulo DIF, ac propterea ita BL ad LH ut DI ad IF, vel (22.6.) ita quadratum BL ad quadratum LH, ut quadratum DI ad quadratum IF. Eadem ratione triangulum LHC ſimile erit triangulo FIE, ac propterea (4.6) ita LH ad LC, ut FI ad IE. Sed (*hyp.*) ut quadratum BL ad LH quadratum, ita LH ad LC, ergò ut quadratum DI ad quadratum IF, ita IF ad IE, ac propterea ſectio DFE, DE, Secundus circulus erit [*Def.* 1. *hujus*]. Eadem ratione de quolibet alio circulo idem demonſtrabitur, quod erat demonſtrandum.

Quoniam verò, ità eſt BO ad OC, ut DV ad VE, ideo patet V fore centrum ſectioni DEE (*Schol. def.* 3. *hujus*) Q.E.D.

Coroll. Ex dictis colligitur DE fore Diametrum circuli DFE cujuſcumque generis fuerit.

PROPOSITIO V.

(*Fig.* 7.)

SI conus quicumque plano ABC per axem, & per diametrum BC ſecetur, ſumatur autem aliquod punctum D in ſuperficie coni, quod non ſit in latere trianguli per axem, & ab ipſo puncto ducatur recta linea DE parallela cuidã rectæ MN, quæ perpendiculariter ducta ſit à circumferentia baſis conicæ ad trianguli baſim, ſivè diametrum BC, triangulo per axem occurret, & ulterius producta uſque ad alteram ſuperficiei conicæ partem, bifariam a plano trianguli ſecabitur.

Conjungatur AD, & protrahatur (*coroll.* 1. *hujus*) donec occurrat circumferentiæ baſis in puncto K, ex quo in eadem baſi ducatur recta KHL parallela ad MN, & proindè etiam parallela ad DE; nec nõ KL (*hyp.* 26., & 29. 1.) perpendicularis erit ad BC: quoniam verò BC eſt etiam in plano trianguli per axem: ergo ſi ducatur ex vertice A ad punctum H linea AH, hæc erit in plano trianguli per axem,

axem. Jam verò concipiatur triangulum AKH, erit DE in hujus trianguli plano; aliàs enim, ſi in hoc plano AKH duceretur ex pũcto D recta quæpiam parallela baſi KH, atque hujuſmodi parallela non eſſet eadem, ac DE, quam oſtendimus eſſe parallelam KH: eſſent (9.11) duæ lineæ ex eodem puncto emanantes parallelæ inter ſe, quod fieri nequit: itaque DE eſt in plano AKH, & ulterius producta [29.1.] incidet in lineam AH, quæ eſt in plano trianguli per axem. ABC, Q.E. primo loco D.

Deinde verò producatur DE, donec occurrat ſuperficiei conicæ in puncto G, & quoniam lineæ DEG, KHL ſunt in eodem plano AKL, hinc recta AGL erit latus trianguli AKL; adeoque (29.1. & 4.6.) ita KH ad HL, ut DE ad EG; ſed (*ex natura curvę BKC*) KH æquatur HL; ergo DE æquatur etiam EG Q.E.D.

PROPOSITIO VI.

(*Fig.* 8.)

SI conus quicumque plano ABC per axem, & per diametrum BC ſecetur, ſecetur autem & altero plano DFE ſecante planum baſis conicæ ſecundùm rectam lineam DE, quæ ſit perpendicularis, vel ad BC baſim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur; lineæ KH, KH, quæ in ſectione DFE ordinatim applicantur in communi ſectione FG plani ſecantis, & trianguli per axem cadent. Atque ſi conus ſit rectus linea DE, quæ eſt in baſi perpendicularis erit ad FG diametrum ſectionis conicæ: ſin verò ſcalenus, nõ ſemper, niſi cum planum ABC, quod per axem ducitur ad baſin coni rectum fuerit.

Quod enim HK plano ABC, & proindè ejus cum plano DFE communi ſectioni FG occurrat, & in ipſo occurſu bifariam ſecetur, id quidem liquet ex præcedenti. Cæterum ſi conus rectus ſit, erit [*def.v.*] axis perpendicula-

ris ad ejus baſim, adeoq; circulus ſubjectus, plano [18.11] ABC rectus erit; ac proinde (3.*def.*11.) eadem DE ad lineam FG perpendicularis erit. Eadem autem eſt ratio, ſi conus ſit ſcalenus, ſed triangulum ABC rectum ſit circulo ſubjecto. Sin verò triangulum ejuſmodi rectum non fuerit ſubjecto circulo, non erit DE ad FG perpendicularis. Nam ſi DE eſſet utrique BC, FG perpendicularis, eſſet etiam (4.11.) eadem DE recta plano ABC; adeoque (18.11.) ipſum planum circuli BDC applicatū lineæ DE rectum eſſet triangulo ABC contra hypotheſim.

Corol. Hinc (7.*def.hujus*) recta FG diameter eſt ſectionis DFE, utpote quæ rectas ordinatim applicatas bifariam ſecat.

PROPOSITIO VII.

(*Fig.* 9.)

SI conus quicumque ſecetur plano MAN per axem, & per diametrum MN, & ſecetur altero plano KFI ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam KLI, quæ ad MN diametrum baſis ſit perpendicularis; diameter autē FL ſectionis conicæ vel æquidiſtet uni AC laterum trianguli per axem, vel cum ipſo extra coni verticem conveniat, & producantur in infinitum ſuperficies conica, & planum ſecans KFI. Sectio quoque ipſa conica in infinitum augebitur, & ex ſectionis conicę producta in infinitum diametro FL abſcindet lineam FG ęqualem cuicumque datæ ipſa DGE, quæ ordinatim applicabitur.

Quoniam enim (*hyp.*) diameter FL cum latere AN ad partes C nunquam convenit; hinc ſi ipſa ad libitum producatur, puta ad G, & per G ducantur DE ad KI, atque BC ad MN parallelæ; erit [15.11.] planum productum per BC, DE parallelum plano MKN; adeòque (4.*hujus*) in ſuperficie conica ulteriùs producta circulum efficiet,

conicæ diameter FG, ſit uni AC laterum trianguli per axem æquidiſtans, & quidem ſectus conus primus ſit, recta linea KL *ordinatim applicata poterit ſpatium contentum ſub linea FL, quæ ordinatim applicatam, & verticem ſectionis interjacet, & Parametro FH, ad quam nempè linea AF, quæ coni verticem, & verticem ſectionis interjacet, habeat eam rationem, quam ad BC quad. baſis trianguli per axem habet rectangulum contentum ſub AB, AC reliquis trianguli lateribus.*

Si verò conus, qui ſecatur, ſecundus fuerit, cujus baſis BDC hujus naturæ fuerit, ut quadratum CG ad quadr. GD *eam rationem habeat, quam eadem*GD *ad* G*B; ſive, quod idem eſt, ut ſolidum ſub CG quad. in GB æquetur cubo* GD, *eademque, ut ſupra, ratione ſectio inſtituatur, cubus rectæ* KL *ordinatim applicatæ æquabitur ſolido, quod continetur ſub recta FL, & quad. Param. FH, ad quod ſcilicet quadratum eandem habeat rationem quadratum AF, quæ coni, & ſectionis verticem interjacet, quam ad cubum BC ſolidum ſub quad. A*B *in AC.*

Si autem conus tertius fuerit, cujus baſis BDC hujus naturæ fuerit, ut planoplanum, quod continetur ſub cubo CG *in GB æquetur quadratoquadrato DG, quadratoquadratum rectæ* KL *æquabitur planoplano, quod continetur ſub abſciſſa FL, & cubo Parametri FH, ad quem ſcilicet cubum eãdem habeat rationem cubus AF, ac ad quadratoquadratum BC planoplanum, quod continetur ſub cubo AB in AC.*

Et tandem, ſi conus eodem, quo ſupra, modo ſecandus, quartus fuerit, cujus baſis BDC hujus naturæ ſit, ut planoſolidum quod continetur ſub quadratoquadrato CG *in GB æquetur quadratocubo* GD, *quadratocubus* KL *æquabitur planoſolido ſub recta LF, & quadratoquadrato Parametri FH, ad quod quadratoquadratum eandem habeat rationem quadratoquadratum A*F, *ac ad quadratocubum BC planoſolidum ſub quadratoquadrato AB in AC.*

 SCHO-

SCHOLIVM.

Eodem modo ex quinti, ſeptimi, & aliorum in infinitum conorum ſectionibus cœteræ hujus generis curvæ haberi poſſunt, ut ex modo allatis, atque ex iis, quæ mox afferam manifeſtum erit. Nec diverſa in ſequentibus utemur methodo pro earum curvarum geneſi, quæ Apollonianam Hyperbolam, atque Ellipſim excedunt. Quare iis gratum me feciſſe exiſtimo, qui Geometriæ amore tenentur; idque affirmare jam auſim; etenim cum hæc eadem nunquam ſatis laudato, æternique nominis Viro, maximo, inquam, Dominico Auliſio, nulli, qui literis inſignis fuit, ſecundo, omnibus verò, qui nunc, vel doctrina, vel morum integritate conſpicui ſunt, abſque injuria præferendo, communicaſſem, eo, quo præditus eſt animi candore, certa mihi ſigna dedit, ſibi hæc placuiſſe, maximèque accepta fuiſſe, undè ſtimulos mihi addidit, ut ſtatim hæc in lucem ederem. Pro certo ſiquidem habeo, omnibus hæc accepta fore, dum illi ingrata non fuerunt, qui primum in his diſciplinis, cæteriſque ſcientiis locum tenet. Eos autem rogatos velim, qui nullis rationibus adducti, ſed nimia in eos, qui me mordicùs carpunt, propenſione impulſi, parum benè de me ſentiunt, ut æquâ mente hæc perpendant; ab his enim maniſeſtè deduci poteſt, quid de aliis, quæ paucis ab hinc menſibus in lucem edidi, judicandum ſit: etenim ut meam hic mentem aperiam, hanc methodum priori anteponendam puto ob hoc præcipuè, quia plurimæ ab Apollonio concinnatæ demonſtrationes his etiam curvis ſatis eleganter conveniunt, ut ex dicendis colligere erit, & præcipuè cum de tangentibus inveniendis in poſterum ſermo habebitur. Accedit etiam quod, hac methodo inventa tot illuſtrium virorum conatus, maximo nobis laboris, moleſtiarumque compendio

erunt,

erunt; quod quidem plurimi faciendum eſt.

Hoc autem extra dubium eſt, eorum reſpectu; quæ paucis ab hinc menſibus publici juris feci, quæ nunc facio, majorem ingenii aciem redolere, utpote quibus in inveniendis acutiori mente opus fuit, quàm in prioribus.

Demonſtratio

Sed jam demonſtrationem afferamus, quæ non ſolùm in omnibus modò expoſitis curvis locum habet, ſed etiam ipſiſſima eſt, ac Apolloniana: quare eandem huc afferre mihi viſum eſt, juxta methodum ab Elia Aſtorino Mathematico præſtantiſſimo excogitatam, quæ quidem omnibus, quotquot inventæ uſque adhuc fuere, præferenda eſt.

Per L ducatur MLN parallela ad BC in plano trianguli per axem, erit (15.11.) planum ductum per MN, KL parallelum baſi conicæ BDC, adeòque (4.*hujus*) ſectio MKNI circulus erit, & quidem ejuſdem naturæ, atque eſt baſis circulus BDC, cujus diameter erit MN, ad quam (10.11.) perpendicularis erit *KL*, adeoque

Si circulus BDC fuerit	Primus, KL quad.	Æquab.	Rectglo ſub NL in LM
	Secundus, KL cub.		Solido ſub NL quad. in LM
	Tertius, KL ququad.		Plplano ſub NL cub. in LM
	Quartus, KL qucub.		Plſolido ſub NL ququad, in LM

Atque adeo.

Pro curva ex ſectione primi Con i genita.

	Reglum ſub FL, & FH ad rectglum ſub FL, & FA (1.6.)
	FH ad FA (*hyp. & invert.*)
Æquant.	BC quad. ad rectglum ſub AC, & AB (23.6.)
hæ Rat.	BC ad AB, plus BC ad AC (4.6.)
	NL, ſive FO ad FA, plus ML ad FL (23.6.)
	Rectglum ſub NL in LM ad rectglum ſub FL, & FA.

Ergo

Ergo (9.5.) Rectglum ſub FL in FH æquabitur reglo ſub ML in LN, cui (*ut prius*) æquatur KL quad. adeòque ſibi æquantur KL quad.& rectglum ſub abſciſſa FL, & Param. FH. Q.E.D.

Pro curva ex ſectione ſecundi Coni genita.

[Solid. ſub FL in quad. FH ad Solid. ſub FL
[in FA quad.(.32.11.)
[FH quad.ad FA quad.(*hyp.& invert.*)
[BC cub. ad Solid. ſub BA quad. in AC (30.
Æquant. [*lib.6.Eucl.Borell.*)
hæ Rat. [BC quad.ad AB quad.plus BC adAC (4.6.)
[LN quad. ſive FO quad. ad FA quad. plus
[ML ad FL.
[Solid.ſub LN quad. in ML ad ſolid. ſub FA
[quad.in FL.

Ergo (9.5.)Solidū ſub abſciſſa FL in quad. FH æquabitur Solid.ſub LN quad.in ML, cui, (*ut prius*) æquatur KL cub.; adeòque ſibi æquantur KL cub.. & Solid. ſub abſciſſa FL,& quadrato Param.FH. Q.E.D.

Pro curva ex ſectione tertii Coni genita.

[Planopla.ſub FL in cub.FH, ad planopl.ſub
[FL in cub.FA.
[FH cub.ad FA cub.(*hyp.& invert.*)
Æquant. [BCquadquad.,ad planopl.ſub cub.BA in AC
hæ Rat. [BC cub.ad AB cub.plus BC ad AC(4.6.)
[LN cub.,vel FO cub.,ad AF cub.,plus ML,
[ad FL
[Planopl.ſub LN cub.,in ML,ad planopl. ſub
[FL in FA cub.

Ergo (9.5.) planoplan.ſub FL in cub. FH æquabitur planoplan.ſub LN cub.in ML,cui(*ut prius*)æquatur qua-

dra-

draqua dr KL; adeòque ſibi æquantur KL qu adquad. & planopl.ſub abſciſſa FL in cub.Param.FH. Q.E.D.

Pro curva ex ſectione quarti Coni genita.

[Planoſolid.ſub FL in quadquad.FH ad pla-
[noſolid.ſub FA quadquad. in FL.
[FH quadqua.adFA quadquad.(*hyp.& inv.*)
[BC quadcub. ad planoſolid. ſub AB qua-
Æquant. [draquad. in AC.
hæ Rat. [BC quadquad.ad AB quadquad. plus BC ad
[AC (4. 6.)
[LN quadquad. vel FO quadquad. ad FA
[quadquad.plus ML ad LF.
[Planſolid.ſub LN quadquad.in ML,ad plan.
[ſolid.ſub FA quadquad. in LF.

Ergo (9.5.) planoſolidum ſub quadquad. FH in FL æquabitur planoſolid. ſub LN quadquad. in ML,cui [*ut prius*) æquatur quadcub.ex LK; adeòque ſibi æquantur quadcub.KL, & planoſolid. ſub abſciſſa FL, & Param. FH quadquad. Q.E.D.

Digitized by Google

Demonſtratio Recentiorum Analyſtarum more pro ſecunda Parabola.

Eſto AB ꝏ *a*.
BC ꝏ *b*. Fiat propter ſimilit. triangulor. ABC, AFO,
CA ꝏ *c*. ut AB ad BC, ita AF ad FO, vel LN
FA ꝏ *d*. *a* — *b* — *d* — $\frac{db}{a}$
FL ꝏ *y*. Rurſus fiat propter ſimilitudinem triangu-
LK ꝏ *x*. lorum ACB, FLM.
ut AC ad CB ita FL ad LM.
c — *b* — *y* — $\frac{yb}{c}$

Multipl. quad. LN, hoc eſt $\frac{ddbb}{aa}$

per LM, hoc eſt $\frac{yb}{c}$

Fit ſolidum ſub quad. LN in LM æquale cubo LK; hoc eſt $\frac{ddbbb}{caa}\,y$ ꝏ x^3

Hinc ſi fiat, ut *caa* ad *bbb*, ita *dd* ad quad. FH, quod vocemus *rr*, habebitur hujuſmodi æquatio *rry*ꝏ*xxx*.

Ex qua cognoſcitur ſolidum ſub quad. datæ rectæ FH, vel Param. in abſciſſam LF æquari cubo applicatæ LK, vel *xxx*. Hinc ea omnia patent, quæ ſuperius dicta ſunt, videlicet ſolidum ſub quadrato AB in AC eandem rationem habere ad cubum BC, quam quad. FA ad quad. Param. FH. Q.E.D.

Eadem prorſus ratione operandum non ſolùm in altioribus Parabolis, ſed etiam in omnibus curvis, quas deinceps tradam; quod unico exemplo demonſtraſſe ſufficiat.

SCHO-

SCHOLIUM.

Hujuſmodi autem curvas Apollonii veſtigiis inhærens, Parabolas vocandas cenſui, ob id nempè, quòd quadratum, vel cubus, vel quadquad. vel quadcub. &c. applicatæ non excedit, nec deficit, vel à rectglo, vel à ſolido, vel à plplano, vel à planoſolido, &c. cui comparatur; ſed vera adeſt inter ejuſmodi quantitates COMPARATIO.

Quoniam verò non una tantùm, ſed indefinitæ Parabolæ generari poſſunt; ideo eas ordinalibus numeris deſignare incongruum non erit. Quare Apolloniana, *Prima hujus prop.* vocabitur, quæ verò ex ſecundi coni ſectione generatur *Secunda hujusprop.*, & quæ ex tertii coni ſectione *Tertia: hujus propoſ.*. & ita deinceps,

Cœterùm ex ſupra allatis demonſtrationibus manifeſtè apparet Apollonianam demonſtrationem locum habere in omnibus hujus generis Parabolis; etenim paucis immutatis omnia cum eadem conveniunt, ubi enim in Apolloniana, ſive Prima habetur Quadratū, in Secunda habetur Cubus, in Tertia Quadratoquadratum, in Quarta Quadratocubus, in Quinta Cubocubus, & ita eodē ordine in altioribus. Similiter, ubi in Apolloniana, ſive Prima habetur Rectangulum, in ſecunda Solidum, in Tertia Planoplanum, in Quarta Planoſolidum, in Quinta Solidoſolidum, & ita eodem ordine in altioribus. Quare facillimum cuique erit, hanc demonſtrationem ad quamlibet Parabolam accomodare.

PROPOSITIO IX.

(*Fig.* 9.)

Geneſis, & Natura earum Parabolarum, in quibus quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. applicatarum æquantur rectangulis ſub abſciſſis inter verticem, & applicatas, in Parametrum, vel ſolidis ſub abſciſſarum quadratis in Parametrum; vel planoplanis ſub abſciſſarum cubis in Parametrum, &c.

SI conus ABC, cujus baſis BDC, hujus naturæ ſit, ut vel rectangulum ſub BG in GC æquetur quadrato applicatæ GD, vel ſolidum ſub quadrato BG in GC æquetur cubo applicatæ GD, vel planoplanum ſub cubo BG in GC æquetur quadratoquadrato applicatæ GD, plano ABC per axem, & per diametrum BC ſecetur, ſecetur autem & altero plano DFE ſecante baſim conicam ſecundùm rectam lineam DE, quæ ad diametrum BC ſit perpendicularis, & ſectionis conicæ diameter FG ſit uni AC laterum trianguli per axem æquidiſtans; recta linea KL ordinatim applicata, ſi

ſi conus primus fuerit, poterit ſpatium contentum ſub linea FL, quæ verticem ſectionis, & ordinatim applicatam interjacet, & Parametro FH, ad quam nempe linea AF, quæ coni, & ſectionis vertices interjacet habet eam rationem, quam ad BC quad. baſis trianguli per axem habet rectangulum contentum ſub AB, & AC reliquis trianguli lateribus.

Si verò conus ſecundus fuerit, rectæ applicatæ KL cubus æquabitur ſolido ſub quad. FL, & Param. FH, ad quam eandem habet proportionem AF, quam ad BC cub. habet ſolidum ſub AB in quadratum AC lateris paralleli diametro ſectionis FG.

Si denique conus tertius fuerit, quadquad. applicatæ KL æquabitur planoplano ſub cubo FL in Param. FH, ad quam eãdem habet rationem AF, quam ad BC quadquad. habet planoplanum ſub cubo AC in AB, & ita in infinitum.

Per L ducatur MLN parallela BC, ergo (15.11.) planum MKNI ſparallelum plano baſis conicæ BDC ſectionem efficiet (4.*bujus*) ejuſdem generis, atque eſt circulus baſis BDC; quare

Si circulus BDC fueri [Primus rectglum MLN / Secund. ſolid. ſub MLq in LN / Tertius, plplnum ſub ML cub. in LN] æquab. LK quad. / LK cub. / LK ququad.

Unde in curva ex ſectione primi Coni genita.

[Rectglum ſub FH in FL, ad rectglum ſub AF
[in FL (1.6.)
Æquant. [FH ad FA (*hyp.& inv.*)
hæ Rat. [BC quad. ad rectglum BAC (23.6.)]
[BC ad AC, plus BC ad AB [4.6.]
[ML ad LF, plus FO, ſive LN ad FA [23.6.]

[Rectglum ſub ML in LN, ad rectglum ſub
[LF in FA.

Ergo[9.5.)rectglum ſub FL in FH æquabitur rectglo ſub ML in LN, cui, *ut prius*, æquatur quad.*LK*, & patet quod E.D.

Pro curva ex ſectione ſecundi Coni genita.

[Solid. ſub FH in FLq., ad ſolid. ſub FA in
[FLq. (25.11.)
[FH ad FA (*hyp.& invert.*
Æquant. [BC cub.ad ſolid. ſub BA in ACq(30.*lib.6.*
hæ Rat. [*Euc.l Borell.*
[BCq. ad ACq.plus BC ad BA (4.6.)
[MLq.,ad LFq.plus LN,vel FO,ad AF.
[Solid.ſub MLq.in LN, ad ſolid. ſub FA in
LFq.

Ergo (9.5.)ſolidum ſub FH in FLq.æquabitur ſolido ſub MLq, in LN,cui [*ut prius*)æquatur cubus LK, & patet Q.E.D.

Atque hæc etiam demonſtratio locum in altioribus etiam curvis habet, immutatis tantummodo iis, quæ in prop.8.dicta ſunt.

Cæterum & hæ curvæ Parabolarum appellationibus deſignabuntur ob eaſdem ſuperius allatas rationes; hoc unico addito, quod Parabolam, quæ ex primi coni ſectione oritur *Primam hujus prop.*vocabo, quæ verò ex *ſecundi Secundam hujus propoſitionis*, & deinceps.

Atque hiſce duabus Propoſitionibus omnium earum curvarum Geneſim demonſtravi. quas Illuſtriſſimis, & Excellentiſſimis DominisD.Dominico Judice Hiſpaniarũ Magnati, & D. Johanni Michaeli Cabanilio Equitum C.M.Præfecto in meo *Aditu* dicaveram.

PROPOSITIO X.

Fig. 10.

Geneſis, & Natura earum Hyperbolarum, in quibus applicatarum quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. excedunt, vel plana ſub abſciſſis inter verticem, & applicatas, & Parametro, vel ſolida ſub abſciſſis, & quad. Parametri, vel plplana ſub abſciſſis, & cubo Parametri, & ita in infinitum.

SI conus ABC plano per axem, & per diametrum BC ſecetur, ſecetur autem & altero plano DFE ſecante baſim conicam ſecundùm rectam lineam DE, quæ perpendicularis ſit ad diametrũ BC, & ſectionis diameter IG producta, cum latere AC trianguli per axem extra coni verticem conveniat in H, & quidem conus ſectus primus ſit, recta linea MN ordinatim applicata poterit ſpatium, quod continetur ſub abſciſſa FN, quæ ſectionis verticem, & applicatam interjacet, & Parametro FL, ad quam eandem habet proportionem recta linea FH, quæ in directum conſti-

tui·

tuitur diametrò ſectionis FG, quam AK quad. lineæ, quæ ſectionis diametro FG æquidiſtans à coni vertice A ad trianguli baſim BC ducitur, ad rectangulum baſis partibus BK, KC, quæ ab ipſa eadem AK æquidiſtante fiunt, contentum; unà cum alio ſpatio, quod ſub eadem abſciſſa FN, & alia recta OX, quæ eandem habet proportionem ad OL, *ſive abſciſſam FN, quam Parameter LF, ad FH.*

Quòd ſi conus eadem ratione ſectus ſecundus fuerit. & quidem baſis circulus BDC hujus ſit naturæ, ut cubus applicatæ DG æquetur ſolido ſub quadrato CG in GB, cubus applicatæ MN æquabitur ſolido ſub abſciſſa FN, & quadrato Parametri FL, ad quod Parametri quad. eandem habet rationem quad. HF, atque cubus AK ad ſolidum ſub quad. KC, in KB, unà cum alio ſolido ſub eadem abſciſſa FN, & ſub dupla FL, & OX in OX, ad cujus OX quadratum eandem habet rationem quadratum abſciſæ FN, atque quadratum FH habet ad quadr. Param. FL.

Si denique conus eadem prorſus ratione ſecandus, tertius fuerit, & quidem circulus BDC hujus ſit naturæ, ut quadquadratum DG æquetur plplano ſub cubo CG in GB, quadquad. applicatæ MN æquabitur plplano ſub abſciſa FN, & cubo à recta FL Param., vel NO, & OX, tanquam una, ad quem ſcilicet cubum FL, vel NO eandem habet rationem cubus HF, atque quadratoquadratum AK ad plplanum ſub cubo CK in

KB,

KB; ad cubum verò recta OX eandem habet proportionem cubus abſciſſæ FN, quam cubus FH, ad cub. Param. FL.

SCHOLIUM.

Eodem modo cœteræ in infinitum curvæ haberi poterunt, quæ magis, magiſque ſe ordine excedant, modò alius, atque alius deinceps conus ſecandus proponatur; unica verò in qualibet harum ſectionum demonſtratio eſt, eaque omnino cum Apolloniana convenit, quarè hanc ob cauſam eandem huc afferre methodo ſupra laudati Aſtorini, non piguit.

DEMONSTRATIO.

Per N in plano trianguli per axem ducatur RS ad BC parallela, eritque (15.11.) planum ductum per MN, & RS ad baſim coni parallelum, ac proinde (4.*hujus*) circulum efficiet ejuſdem naturæ, atque eſt baſis circulus; adeoque.

circulus BDC fuerit	Primus, MN quad.	Rectglo ſub RN in NS	
	Secundus, MN cub.	Æquab. Solido ſub RN	in NS quad.
	Tertius, MN ququad.	Plano ſub RN	in NS cub.

Ac propterea conſtructa figura, ut apparet factum.

Pro curva ex ſectione primi Coni genita.

[Rectglum ſub FN, & NH, ad rectglum ſub FN, & NX (1.6)
[NH, ad NX (4.6.)
Æquant. [FH, ad FL (*hyp.*)
hæ Rat. [AK quad:, ad rectgulum ſub CK in KB (23.6.)
[AK, ad KC, plus AK ad KB. (4.6.)
[HN, ad NS, plus FN ad NR (23.6.)

Ra:

[Rectglum ſub FN in HN, ad rectglum ſub
[NR in NS

Ergo (7.5.) ſibi æquantur rectglum ſub FN, & NX, & rectglum ſub NR, & NS, cui (*ut prius*) æquatur quad. NM. ſed rectglum ſub FN, & NX eſt id, quod continetur ſub FN abſciſſa, & *Param*: FL., unà cum plano ſub eadem abſciſſa, & OX, ad quam eãdem habet proportionem abſciſſa FN, vel LO, quam FH, ad *Param*. FL; ergo patet quad: applicatæ NM æquari plano ſub abſciſſa, & *Param*: unà cum plano ſub eadem abſciſſa, & recta OX. Q.E.D.

Pro curva ex ſectione ſecundi Coni genita.

[Solid. ſub FN, in NH quad: ad ſolid: ſub FN,
[in NX quad.
[NH quad:, ad NX quad: (4.6.)
Æquant. [FH quad: ad FL quad: (*hyp.*)
hæ Rat. [AK cub: ad ſolid: ſub CK quad: in KB (30.
[*lib.*6. *Eucl: Borell*:
[AK quad: ad CK quad,, plus AK, ad KB
[(4.6.)
[HN quad: ad NS quad: plus FN ad NR
[Solid: ſub FN in HN quad:, ad ſolid: ſub
[NS quad: in NR.

Ergo (7.5.) ſolid: ſub FN in NX quad: æquabitur ſolido ſub NS quad: in NR, cui (*ut prius*) æquatur cubus MN applicatæ; ſed ſolid: ſub FN in NX quad: eſt id, quod continetur ſub FN abſciſſa in quad: Param. FL, unà cum ſolido, quod continetur ſub eadẽ abſciſſa F N, & rectglo ſub 2 NO, & OX, in OX, ad cuius OX quad: eãdẽ habet proportionẽ quad. abſciſſæ, atque eſt quad: FH, ad quad: *Parametri* FL. ergo patet cubum applicatæ NM æquari ſolido ſub abſciſſa. & *Parametri* quad: una cum alio ſoli- ſub eadem abſciſſa, &c. Q.E.D.

Digitized by Google

Pro curva ex ſectione tertii Coni genita.

Æquant. hæ Rat.

- Plplanum ſub FN, & HN cub., ad plplanum ſub FN, & NX cub.
- NH cub. ad NX cub. (4.6.)
- FH cub. ad FL. cub. (*hyp.*)
- AK ququad., ad plplan. ſub CK cub. in KB.
- AK cub., ad CK cub., plus AK ad KB.
- HN cub., ad NS cub., plus FN ad NR.
- Plplanum ſub HN cub. in FN, ad plplanum ſub NS cub. in NR.

Ergo [9.5.] plplanũ ſub FN, & NX cubo æquatur plplano ſub NS cubo in RN, cui (*ut prius*) æquatur ququadr. applicatæ MN; ſed plplanum ſub FN in NX cubũ æquatur plplano ſub FN abſciſſa in cubũ Param. FL, unà cum recta OX tanquam una linea ? ergo patet ququad. applicatæ MN æquari plplano ſub abſciſſa in cubum NX, ut ſupra. Q.E.D.

S C H O L I U M.

Sed nec ab Apollonio diſcedere viſum eſt in his curvis nomina imponendo, quare nos etiam *Hyperbolas* vocabimus; quadratum enim, vel cubus, vel ququad. &c. cujuſcumque ex applicatis excedit rectglũ, vel ſolidum, vel plplanum, &c. ſub abſciſſa, & Parametro, vel ſub abſciſſa, & Parametri quadrato, vel denique ſub abſciſſa, & cubo Param., & ita deinceps.

Quoniam autem numero indefinitæ hæ Hyperbolæ ſũt; ideo, ut ſupra in Parabolis factum eſt, nominibus ordinalibus eaſdem deſignabimus, quare quæ oritur ex ſectione primi coni Hyperbola *Prima hujus propoſ.* nuncupabitur; quæ verò ex ſectione ſecundi *Secunda hujus propoſit.* &c.

Illud etiam hoc loco monendum cenſui, demonſtra-

Digitized by Google

tionem,qua pro omnibus his in infinitum curvis opus habemus unicam eſſe, atq; omnino cum Apolloniana convenire; ſat enim eſt,ubi in Apolloniana habetur quadratum, in ſecunda hyperbola ponere cubum, in tertia quadratoquadratum, in quarta quadcub., & ita deinceps; ubi verò in Apolloniana habetur planum, vel rectglum, in ſecunda reponi debet ſolidum, in tertia plplanum, in quarta plſolidum, & ita deinceps; quæ omnia manifeſtè apparent ex ſupra allatis demonſtrationibus.

PROPOSITIO XI.

(*Fig.* 10.)

Geneſis, & Natura omnium Hyperbolarum, in quibus quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata,&c. applicatarum excedunt, vel plana ſub abſciſſis, & Parametro, vel ſolida ſub abſciſſarum quadratis, & Parametro, vel planoplana ſub aſciſſarum cubis, & Parametro,&c. & ita deinceps in infinitum.

SI conus plano ABC per axem, & per diametrum BC ſecetur, ſecetur autem & altero plano DFE ſecante baſim conicam ſecundùm rectā lineam DE, quæ ad baſim BC trianguli per axē,

vel

vel ad diametrum ſit perpendicularis, & ſectionis diameter FG producta cum latere AC trianguli per axem extra coni verticem conveniat in H, rectæ lineæ MN ordinatim applicatæ quadratum, ſi conus primus ſit, æquabitur plano, quod continetur ſub abſciſſa FN in Parametrū FL, ad quam ea FH, quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, eam proportionem habet, quam AK quad. lineæ, quæ ſectionis diametro FG æquidiſtans à coni vertice A ad trianguli baſim BC ducitur, ad rectglum baſis partibus BK, KC, quæ ab ipſa eadem AK æquidiſtante fiunt, contentum, unà cum alio plano, quod continetur ſub eadem abſciſſa, & alia linea XO, ad quam eam rationem habet abſciſſa FN, quam recta HF ad Parametrum FL.

Quòd ſi conus ſecūdus fuerit, & circulus BDC hujus ſit naturæ, ut cubus applicatæ DG æquetur ſolido ſub quad. BG in GC, cubus applicatæ MN æquabitur ſolido, quod continetur ſub quad. abſciſsæ in Param., ad quam eam proportionem habet recta HF, ut ſupra, quam cubus AK, ad ſolidum ſub quad. BK in KC, unà cum alio ſolido ſub quad. ejuſdem abſciſſæ FN in XO, ad quam XO eam rationem habet abſciſsa FN, quam FH ad FL Parametrum.

Si denique ſectus conus tertius fuerit, & quidē circulus BDC hujus ſit naturæ, ut ququad. DG æquetur plplano ſub cubo BG in GC; ququad. applicatæ MN æquabitur plplano ſub cubo abſciſ-

ſæ FN in Param.FL, ad quam eam rationem habet FH, atque ququad. AK, ad plplanum ſub cubo BK in KC, unà cum alio plplano ſub cubo abſciſsæ in XO, ad quam ita eſt eadem abſciſsa FN, ut FH ad FL Parametrum.

SCHOLIUM.

Eodem modo; & cæteræ curvæ haberi poterunt, quæ magis, magiſque ſe ordine excedunt, modò alius, atque alius deinceps conus ſecandus proponatur.

DEMONSTRATIO.

Per N in plano trianguli per axem ducatur RS ad BC parallela, eritque (15. 11.) planum ductum per MN, & RS ad baſim conicam parallelum, ac proinde (4.*huius*) circulum efficiet ejuſdem naturæ, atque eſt baſis circulus; adeoque

Si circulus BDC fuerit	Primus,	MNquad.	Rectglo ſub RN in NS	
	Secundus,	MN cub.	Æquab. Solido ſub RN	in NS quad,
	Tertius,	MN ququad,	Plplano ſub RN	in NS cub,

Adeoque, conſtructa figura, ut apparet.

Pro curva ex ſectione primi Coni genita.

Æquant: hæ Rat.

Rectglum ſub FN, & HN, ad rectglum ſub FN, & NX (1.6.)
HN ad NX (4.6.)
HF ad FL (*hyp.*)
AK quad., ad rectglum ſub BK, & KC (23.6.)
AK ad BK, plus AK ad KC [29. 1. & 4.6.]
FN, ad NR, plus HN ad NS [23.6.]
Rectglum ſub FN, & HN, ad rectglum ſub NR, & NS,

Er-

Ergo (9. 5.) ſibi æquantur rectglum ſub FN,& NX, & rectglum ſub NR, & NS, cui (*ut prius*) æquatur quad: NM. Sed rectglum ſub FN, & NX eſt id, quod continetur ſub FN abſciſſa, & Param: FL, unà cum plano ſub eadem abſciſſa, & OX, ad quam eandem habet proportionem abſciſſa FN, vel LO, quam FH, ad Param: FL. Ergò patet, quad: applicatæ NM æquari plano ſub abſciſſa, & Param: unà cum alio plano ſub eadem abſciſſa, & recta OX. Q. E. D.

Pro curva ex ſectione ſecundi Coni genita.

Æqu: hæ Rat:

[Solid: ſub FNq; in HN, ad ſolid: ſub FNq. in NX (25. 11.)

[HN, ad NX (4. 6.)

[HF ad FL (*hyp:*)

[AK cub: ad ſolid: ſub BKq. in KC (30. *lib.* 6. *Eucl: Borel:*)

[AKq. ad BKq; plus AK ad KC. (29. 1. & 4. 6.)

[FNq. ad RNq; plus HN ad NS.

[Solid: ſub FNq. in HN, ad ſolid: ſub RNq. in NS.

Ergo (9. 5.) ſibi æquantur ſolid: ſub FNq. in NX, & ſolid: ſub RNq, in NS, cui [*ut prius*] æquatur cub. NM. Sed ſolid: ſub FNq. in NX, eſt ſolid: ſub abſciſſæ FNq. in Param: FL, unà cum ſolido ſub ejuſdem abſciſſæ FNq. in OX, ad quam ita eſt abſciſſa FN, ſive LO. ut HF ad parametrum LF. Ergo patet cubum applicatæ NM æquari ſolido ſub abſciſſæ quadrato in Parametrum, unà cum ſolido ſub ejuſdem abſciſſæ quad: & alia recta OX, ut ſupra dictum eſt. Q. E. D.

S C H O L I U M.

Su perfluum foret hic alias demonſtrationes pro aliis curvis addere, cum omnes ex Apolloniana pēdeant, facillimum-

mumque ſit quaslibet concinnare, nil enim immutandum eſt, quàm verba quadrati in cubum,& plani,vel rectgli in ſolidum, ut in modò allata demonſtratione factum eſt.

Neceſſe etiã eſt,ut & has curvas *Hyperbolas* vocemus, etenim quadratum, vel cubus, &c. applicatæ excedit,vel planum ſub abſciſſa,& Param:,vel ſolid:ſub abſciſſæ quad: in Parametrum.

Quoniam autem non unica,ſed indefinitæ Hyperbolæ ſunt, ideo eaſdem inſuper nominibus ordinalibus deſignabimus; quare Apolloniana *Prima hujus prop*:dicetur,quæ verò oritur ex ſectione ſecundi coni, *Secunda hujus prop*: dicetur, & quæ ex tertii *Tertia hujus prop*:& ita deinceps in infinitum.

PROPOSITIO XII.

(*Fig.* 11.)

Geneſis, & Natura Oppoſitarum Hyperbolarum.

SI quæcumque ſuperficies BAC, AXQ, quæ sũt ad verticem, plano BAQXC per axem, & per diametrum BC alicujus ex baſibus ſecentur, ſecentur autem & altero plano DEFOHK non per verticem, ſecante baſim v.g. BDC ſecundùm rectam lineam DF, quæ perpendicularis ſit ad diametrum BC, erit in utraque ſuperficierum ſectio DEF, OHK, quæ vocatur Hyperbola, altera propoſ. 10., *altera verò propoſ.* 11. *Et duarum Hyperbolarum diameter MEHN eadem erit. Parametri verò EP, HR inter ſe æquales*

erunt

erunt,ſi ſectiones Primæ Hyperbolæ fuerint: ſi verò ſecundæ , & quidem Hyperbola DEF *ſit Secunda propoſ.*10. *Parameter* EP *ad Parametrũ* HR *ita erit, ut* HE *ad* EP; *ſi autem ſectiones genitæ Tertiæ Hyperbolæ fuerint & quidem Hyperbola* DEF *Tertia Propoſ.*10. *Parameter* EP *ad parametrum* HR *eandem habebit rationem , ac quadratum* HE *ad quad.* EP; *& ita eodem modo.*

Nota I. Planum ABC ſecans baſim BDC per diametrũ BC ſecare etiam baſim XKQ ſecundum rectam lineam XQ, quæ erit diameter circuli XKQ cujuſcumque generis fuerit.

Nota II. Si ſolidum ſub quad: BM in MC æquetur cubo applicatæ DM; in circulo XKQ ſolidum ſub quad: QN in NX æquabitur cubo applicatæ NK, quæ omnia ex prop: 4. *hujus* patent.

His præmiſſis. Quòd utriuſque ſectionis diameter ſit eadem, id quidem *ex hyp*: patet.

Quòd verò cum ſectio DEF eſt Hyperbola prop. 10, altera OHK ſit Hyperbola prop: 11: in hunc modũ demonſtrari poteſt.

Per A ducatur ALY parallela ſectionũ diametro MN, ſitque Hyperbola DEF ſecunda prop: 10. cujus Parameter EP. Similia [29. 1. & 4.6.] erunt triangula ALC, AYX, item ALB, AYQ. quare

[HE quad: ad EP quad: [*hyp*, & 10. *hujus*]
[AL cub: ad ſolid: ſub CL quad: in BL [30 *lib.6. Euclid. Borel.*]
Æq. hæ Rat. [AL quad: ad LC quad:, plus AL ad LB [4.6.]
[AY quad: ad YX quad:, plus AY ad YQ.
[AY cub: ad ſolid: ſub YX quad: in YQ [11. *hujus.*
[EH ad HR Param.

Unde patet ſectionem OHK Hyperbolam ſecundam prop. 11. eſſe, quod demonſtrare opus erat.

Quod ſi Hyperbola DEF ſecunda fuerit propoſ.11. OHK erit ſecunda propoſ.10. nec diſſimilis eſt demonſtratio.

Quòd autem Parametri æquales inter ſe ſint,ſi Hyperbolæ primæ fuerint,demonſtravit Apollonius. Quòd verò,ſi Hyperbolæ ſecundæ fuerint, ut ſupra dictum eſt. Parameter EP, ad Param. HR eandem rationem habeat, ac HE ad EP, id manifeſtè deducitur ex modò allata demonſtratione; ab ea enim colligitur, ita eſſe HE quadratũ ad EP quadratum, ut HE ad HR Param: unde continuè proportionales erunt HE, PE, HR; quare erit PE Parameter ad HR Param, ut HE ad EP. Q.E.D.

Si Hyperbola DEF tertia fuerit prop.10.demonſtrabitur ita eſſe cubum HE ad cubum EP,ut EH ad HR,unde apparet ità eſſe PE Param.ad RH Param. ut HE quad. ad EP, &c.

SCHOLIUM.

Hæ autem curvæ *Oppoſitæ Hyperbolæ* Apolloniano more vocari poſſunt.

PROPOSITIO XIII.

(Fig. 12.)

SI conus quicumque ABC plano per axem, & per diametrum BC ſecetur, ſecetur autem & altero plano LEF conveniente cum utroque latere trianguli per axem & quod non ſit parallelum plano baſis. Planum autem in quo eſt coni baſis BC conveniat cum plano ſecante ſecundum rectam lineam FQ, quæ ſit perpendicularis

ad

ad diametrum BC ad partes G productã, ſi opus fuerit: ſectio LME primus circulus erit; ſi conus ABC fuerit primus, atque ſi continuè proportionales fuerint BG, GA, GC: intellige autem rectam AG eſſe in plano trianguli per axem, necnõ parallelã LF diametro ſectionis productæ ad F.

Quòd ſi conus ABC ſecundus fuerit, ita ut ſolidum ſub quad. CV in VB æquetur cubo applicatæ DV, atque eodem modo inſtituatur ſectio, omnibuſque ut ſupra poſitis, BG ad GA ſit, ut quadratum GA ad GC quadratum, ſectio LME ſecundus circulus erit.

Si denique conus eadem ratione ſecandus tertius fuerit, ita ut plplanum ſub cubo CV in VB æquetur quadquadrato applicatæ VD, atq; ita ſit BG ad GA, ut GA cubus ad CG cubũ, ſectio LME tertius circulus erit, & ita eodem modo in cæteris conis.

Sumpto quolibet puncto M in curva LME applicetur MN, & per N ducatur RNS parallela diametro BC; tum per rectas RS, MN ducatur planum RMS, quod parallelum erit [15.11.] baſi conicæ; ac propterea (4.*hujus*) circulum efficiet, cujus diameter RS, applicata verò (10.11.) recta MN, adeoque

	Primus,	MN quad.		Rectãglo ſub RN	in NS
Si circulus RBC fuerit	Secundus,	MN cub.	Æquab.	Solido ſub RN	in NS quad,
	Tertius,	MN ququad.		Pl. lano ſub RN	in NS cub,

Adeoque ſi conus primus fuerit

[BG ad GA (4.6.)
[BF ad FL (4.6.)
[RN ad NL [*ut prius*)
E BG

6

Æquant. hæ Rat.
[BG ad GA (*hyp.*)
[GA ad CG (4.6.)
[EF ad FC (4.6.)
[EN ad NS.

Ergo (11.5.) ita EN ad NS, ut RN ad NL; quare ◡16.6 rectglum ſub EN in NL æquatur rectglo ſub RN in NS, cui æquatur quad. NM. Ergo rectglum ſub EN in NL æquatur quadrato applicatæ NM; ac proptereà ſectio circulus erit. Q.F.D.

Si Conus ſecundus fuerit.

Æquant. hæ Rat.
[BG ad GA (4.6.]
[BF ad FL [4.6.]
[RN ad NL [*ut prius*]
[BG ad GA (*hyp.*)
[GAq. ad CGq. (4. & 22.6.)
[EFq. ad FCq. (4.6.)
[ENq. ad NSq,

Ergo (11.5.) ita eſt RN ad NL; ut EN q. ad NS q. quare ſolid. ſub EN q. in NL æquabitur ſolido ſub RN in NSq., cui (*ut prius*) æquatur cubus applicatæ NM; ergo patet ſectionem LME circulum ſecundum exiſtere. Q.E.D.

SCHOLIVM.

Eadem demonſtratione in altioribus opus eſt. Hujuſmodi autem ſectiones *Subcontrariæ* vocentur.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

(*Fig.* 12.)

Iiſdem autem poſitis, ſi circulus BDC bujus ſit naturæ, ut cubus DV æquetur ſolido ſub quadrato BV in VC, vel ququadratum DV æquetur plplano ſub cubo BV in VC, &c. ſectio LME circulus erit, & quidem primus, ſi exiſtente cono ABC primo, ita ſit BG ad GA, ut GA ad GC.

Vel circulus ſecundus erit, ſi exiſtente cono ABC ſecundo, ita fuerit BG quadratum ad GA quadratum, ut GA ad CG.

Vel denique tertius circulus erit, ſi exiſtente tertio cono ABC, ita fuerit BG cubus ad GA cubum, ut BA ad GC, & ita eodem modo in infinitum.

Omnibus enim, ut ſupra in propoſit. 13. conſtructis.

	Primus,	MN quad.		Rectglo ſub RN	in NS
Si circulus BDC fuerit	Secundus	MN cub.	Æquab.	Solido ſub RN	in NS quad,
	Tertius,	MN ququad.		Plplano ſub RN	in NS cub,

	BG ad GA (4.6.)
	BF ad FL (4.6.)
Æqu. hæ	RN ad NL (*ut prius*)
hæ Rat.	BG ad GA (*hyp.*)
	GA ad GC (4.6.)
	EF ad FC (4.6.)
	EN ad NS

Ergo ita EN ad NS, ut RN ad NL, ac propterea (16.6.) planum ſub EN in NL æquabitur plano ſub NS, & RN,

 cui

cui [*ut prius*] æquatur quadratum MN; ergo planum ſub EN in NL æquabitur quadrato MN; unde ſectio LME eſt circulus Q.E.D,

Si conus ſecundus fuerit.

[BG quad:ad GAq.[4.& 22.6.]
[BF quad:ad FL quad:[4.6]
[RN quad:ad NL quad: [*ut prius*]
Æqu. hæ [BG quad:ad GA quad: [*hyp*:]
Rat. [GA ad CG [4.6.]
[EF ad FC [4.6.]
[EN ad NS

Ergo RN quadratum ad quadratum NL,ut EN ad NS. Ergo ſolidum ſub quadrato NL in EN æquabitur ſolido ſub quadtato RN in NS, cui [*ut prius*] æquatur cubus NM. Ergo ſolidum ſub quadrato NL in NE æquabitur cubo NM, ac propterea ſectio LME ſecundus circulus erit. Q.E.D.

S C H O L I V M.

Hujuſmodi etiam ſectiones *Subcontrariæ* vocentur.

P R O P O S I T I O XV.

(*Fig.* 13.)

Geneſis, & Natura earum Ellipſium; in quibus applicatarum quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. deficiũt vel à planis ſub abſciſſis, inParametrũ, vel ſolidis ſub abſciſſis

in

in Parametri quadratum, vel à planoplanis ſub abſciſſis in Parametri cubum, & ita eodem ordine in infinitum.

SI conus plano ABC per axem, & diametrum BC ſecetur; ſecetur autem & altero plano FMH conveniente cum utroque latere trianguli per axem, atque ſecante planum baſis coni ſecundùm rectam lineam GP, quæ perpendicularis ſit ad diametrum circuli BDC, productam, ſi opus fuerit, ad partes K, nec ſubcontrariè ponatur, rectæ lineæ MN ordinatim applicatæ quadratū, æquabitur plano ſub abſciſſa FN, & Parametro FL, ad quam eandem rationem habet diameter FH, atque quadratum AK rectæ parallelæ diametro FH ad planum ſub BK, & CK, minus plano ſub eadem abſciſa FN, vel OX; & recta XL, ad quam XL eandem habet proportionem abſciſſa OX, vel FN, quam diameter FH ad Parametrum FL.

Quòd ſi conus ſecūdus fuerit, & circulus BDC hujus naturæ, ut ſolidum ſub quadrato CG in GB æquetur cubo applicatæ DG, cubus applicatæ NM æquabitur ſolido ſub abſciſa FN, & quadrato rectæ NO, vel FX deficientis à Parametro FL, recta LX, ad quam LX ita eſt abſciſa FN, atque diameter FH ad Parametrū FL.

Si

Si denique conus tertius fuerit, & circulus BDC bujus naturæ, at plplanum ſub cubo CG in GB æquetur ququadrato applicatæ DG; ququatum applicatæ NM æquabitur planoplano ſub abſciſſa, & cubo rectæ NO, vel FX, deficientis à Parametro FL rectâ LX, ad quam LX ita eſt abſciſſa FN, atque diameter FH ad Parametrũ FL

SCHOLIUM.

Eadē ratione ex quarti, quinti, & ſexti coni, &c. ſectionibus cœteræ in infinitum curvæ magis compoſitæ haberi poſſunt. Demonſtratio autem unica in omnibus eſt, atque omnino cum Apolloniana convenit; unde faciliimum erit cuilibet propoſitæ curvæ accomodare.

DEMONSTRATIO.

Per N ducatur recta RNS ad BG parallela: Ergo (15. 11.) planum per RS, NM, parallelum erit baſi coni, atque conum ſecando (4. *huius*) circulum efficiet, ejuſdem quidem naturæ, atque eſt baſis circulus: adeoque

	(Primus,	MNquad. (	Rectglo ſub RN in NS
Si circulus BDC fuerit	(Secundus,	MNcub.	(Aequ. Solid. ſub RN in NS qua.
	Tertius	MNququad. (	Plplan. ſub RN in NS cub,

Ergo pro curva ex primi Coni ſectione orta.

Æqu. hæ Rat.
- [Rectglum ſub HN in FN, ad rectglum ſub FN, & NO (1.6.)
- [NH ad NO (4.6.)
- [HF ad FL (*hyp*)
- [AK quad: ad rectglum ſub KC in KB; (23.6.)
- [AK ad KC, plus KA ad KB.
- [HG ad CG, plus FG ad GB (4.6.)
- [HN ad NS, plus FN ad NR (23.6)

[Rectglum ſub HN in FN ad rectglum ſub NS in NR

Ergo (9. 5.) rectglum ſub FN, & NO æquatur rectglo ſub NS in NR, cui (*ut prius*) æquatur quadratum NM. Ergo rectglum ſub FN, & NO, vel FX æquatur quadrato NM. Sed rectglum ſub FN, & NO, vel FX eſt id, quod continetur ſub abſciſſa F*N*, & recta FX, deficiente à Parametro FL recta XL, ad quam eandem habet proportionem abſciſſa FN, vel OX, quam diameter FH ad Parametrum FL? ergo patet Q.E.D.

Pro curva ex ſectione ſecundi Coni orta.

Æqu: hæ Rat.

[Solidum ſub FN, & quad: NH ad ſolid: ſub FN, & quad: NO.
[HN quad: ad NO quad: (4. & 22. 6.)
[HF quad: ad FL quad: (*hyp.*)
[AK cub: ad ſolid: ſub CK quad: in KB (30. *lib.* 6. *Eucl. Bor.*)
[AK quad: ad CK quad: plus AK ad KB (4. & 22. 6.)
[HG quad: ad CG quad: plus FG ad GB (4. 6.)
[HN quad: ad NS quad: plus FN ad NR
[Solid: ſub HN quad: in FN ad ſolid: ſub NS quad. in NR.

Ergo (9. 5.) ſibi æquantur ſolidum ſub NO quad: & FN, & ſolidum ſub NS quadratum in NR, cui (*ut prius*) æquatur cubus applicatæ NM. Ergo ſolidum ſub quadrato NO, vel FX æquatur cubo applicatæ NM. Sed ſolidum ſub FX quadrato in FN eſt id, quod continetur ſub abſciſſa FN, & quadrato rectæ FX deficientis à Parametro FL recta XL, ad quam FX ita eſt quadratum abſciſſæ, ut diameter FH ad Parametrum FL. Ergo patet, quod E.D.

Pro

Pro curva ex ſectione tertii Coni orta.

[Plplanum ſub FN, & cubo NH ad plplanum
Æquant. [ſub FN, & cubo NO
hæ Rat. [Cub: NH ad cub:NO
[Cub:HF ad cub:FL [*hyp.*]
[Ququad:AK ad plplanum ſub cub:CK in KB
[AK cub:ad cub: CK, plus AK ad KB [4.6.]
[HG cub: ad CG cub. plus FG ad GB [4.6.]
[HN cub.ad NS cub: plus FN ad NR
[Plpla.ſub HN cub: in FN ad plpla: ſub NS
[cub: in NR

Ergo [9.5.] ſibi æquantur plplanum ſub FN, & cubo NO, & planum ſub cubo NS in NR, cui [*ut prius*] æquatur quadratum applicatæ NM. Ergo æquantur plplanum ſub cubo NO, vel FX, & ququadratum applicatæ NM. Sed plplanum ſub FN, & cubo FX eſt id quod continetur ſub abſciſſa FN, & cubo rectæ FX, deficientis à Parametro FL recta XL, ad quam LX eandem habet rationem abſciſſa FN, vel OX, quam diameter FH ad Parametrum. Ergo manifeſtè apparet, quod D. ſuſceperam.

S C H O L I U M.

Curvas modò deſcriptas *Ellipſes* vocare æquum eſt, quandoquidem eodem nomine Apollonius uſus eſt, cum quadrata, vel cubi, vel ququadrata, &c. applicatarum deficiant à planis, vel ſolidis, vel plplanis, quibus comparantur.

Quoniam autem non una, ſed numero indefinitæ hæ curvæ ſunt, ideo eaſdem ordinalibus nominibus deſignare neceſſum puto. Quare quæ oritur ex ſectione primi coni *Prima Ellipſis* nuncupabitur, numerumque hujus propoſitionis addemus. Quæ verò ex ſecundi ſectio-

ne

ctione oritur *Secunda hujus propoſitionis Ellipſis*; & quæ ex tertii *Tertia*, & ita deinceps eodem ordine.

Atque hoc etiam loco animadvertere licet, demonſtrationem, qua uſus ſum, omnino cum Apolloniana convenire, ubi enim in illa habetur quadratum, in hac habetur cubus, aut quadratoquadratum, &c. ubi verò in Apolloniana habetur rectglum in hac habetur, vel ſolidum, vel plplanum, &c.

PROPOSITIO XVI.

(*Fig.* 13.)

Geneſis, & Natura earum Ellipſium, in quibus quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. applicatarum deficiunt vel à planis ſub abſciſſis in Parametrum, vel a ſolidis ſub abſciſſarum quadratis in Parametrum, vel à planoplanis ſub abſciſſarum cubis in Parametrum, &c.

Si conus ABC plano ABC per axem, & per diametrum BC ſecetur, ſecetur autem & altero plano FMH conveniente cum utroque latere trianguli, atque ſecante planum baſis coni ſecundùm rectam lineam GP, quæ perpendicularis ſit ad diametrum BC productam, ſi opus fuerit, ad partes K, nec ſubcontrariè ponatur, rectæ lineæ NM ordinatim applicatæ quadratum, ſi conus

 pri-

primus fuerit, æquabitur plano ſub abſciſsa, in Parametro FL, ad quam eandem habet rationem diameter FH, quam quadratum AK rectæ paralelæ diametro ſectionis FG, ad planum ſub CK in KB, minus plano ſub eadem abſciſsa in rectam XL, ad quam ita eſt eadem abſciſsa, ut diameter FH ad Parametrum FL.

Quòd ſi conus ſecundus fuerit, atque circulus BDC hujus naturæ, ut ſolidum ſub quadrato GB in GC æquetur cubo applicatæ DG, rectæ applicatæ NM cubus æquabitur ſolido ſub abſciſsæ FN quadrato in Parametrum FL, ad quam eandem rationem habet diameter FH, quam cubus AK ad ſolidum ſub quadrato KB in CK, minus ſolido ſub quadrato abſciſsæ FN in XL, ad quã XL ita eſt eadem abſciſsa FN, ut diameter ad Parametrum.

Si denique conus eadem ratione ſecandus tertius fuerit, & circulus BDC hujus naturæ, ut plplanum ſub BG cubo in CG æquetur ququadrato applicatæ GD, quadratoquadratum applicatæ NM æquabitur plplano ſub abſciſsæ FN cubo in Parametrum FL, ad quam eandem habet rationem diameter FH, quam ququadratũ AK ad planoplanum ſub cubo BK in CK, minus plplano ſub ejuſdem FN cubo in LX, ad quam XL ita eſt abſciſsa FN, ut diameter FH ad Parametrum FL.

SCHO.

S C H O L I U M.

Eodem prorſus modo in altioribus curvis operandum, ita ut facillimum cuique ſit, quamlibet hujus generis curvam invenire.

D E M O N S T R A T I O.

Per N ducatur recta RNS parallela diametro BC: ergo planum ductum per RS, NM parallelum erit plano baſis coni, ac propterea ſectio RMS circulus erit [4. *hujus*] ejuſdem quidem naturæ, atque eſt baſis circulus: adeoque,

Unde.

	(Primus,	MNquad. (	Rectglo ſub RN in NS
Si circulus BDC fuerit	(Secundus,	MNcub.	(Aequ. Solid. ſub RN in NS qua.
	Tertius	MNququad. (	Plplan. ſub RN in NS cub.

Pro curva ex ſectione primi coni genita.

[Rectglum ſub FN in NH ad rectglum ſub
[FN in NO (1.6.)
[NH ad NO (4.6.)
Æqu: hæ [HF ad FL (*hyp.*)
Rat. [AK quad: ad rectglum ſub KB in KC [23.6.]
[AK ad KB, plus AK ad KC [4.6.]
[FG ad GB, plus HG ad GC [4.6.]
[FN ad NR, plus NH ad NS [23.6.]
[Rectglum ſub FN in NH ad rectglum ſub
[*NR* in *NS*.

Ergo [9.5.] ſibi æquantur rectglum ſub FN, & NO, & rectglum ſub RN, & NS, cui [*ut prius*] æquatur quadratum applicatæ NM. Ergo ſibi æquantur rectglum ſub FN, & *NO*, & quadratum NM. Sed rectangulum ſub F*N*, & NO eſt rectglum ſub abſciſſa FN, & Parametro FL, minus rectglo ſub eadem abſciſſa FN, vel OX, & rectaLX ad quam ita eſt abſciſſa OX, ut diameter FH ad Parametrum FL. Ergo patet, Q.E.D.

F 2 Pro

Pro curva ex ſectione ſecundi Coni genita.

[Solid: ſub FN quad:in NH ad ſolid: ſub FN
[quad:in NO
[NH ad NO (32.11.)
Æquant. [HF ad FL (*hyp.*)
hæ Rat. [AK cub: ad ſolid: ſub KB quad: in KC (36.
[*lib.6.Eucl.Bor.*)
[AX quad:ad KBquad:,plus AK ad KC(4.6.)
[FG quad:ad GB quad:plus HG ad CG (4.6.)
[FN quad ad NR quad:plus HN ad NS
(Solid: ſub FN quad :in HN ad ſolid: ſub NR
[quad in NS

Ergo (9.5.) ſibi æquantur ſolidum ſub FN quadrato in NO, & ſolidum ſubquadrato NR in NS, cui (*ut prius*) æquatur cubus applicatæ NM. Ergo ſibi æquantur cubus applicatæ NM, & ſolidum ſub quadrato FN, & NO. Sed ſolidum ſub quadrato FN in NO æquatur ſolido ſub quadrato abſciſſæ FN in Parametrum, minus ſolido ſub ejuſdem abſciſſæ FN quadrato in XL, ad quam ita eſt abſciſſa FN. vel OX, ut diameter FH ad Parametrum FL. Ergo patet Q.E.D.

Pro curva ex ſectione tertii coni genita.

[Plplanũ ſub FN cub:in NH ad plplanum ſub
[cubo FNin NO
[NH ad NO (4.6.)
Æquant. [HF ad FL (*hyp*(
hæ Rat. [AK ququad:ad plplan .ſubKB cub.in KC;
[AK cub.ad KB cub; plus AK ad KC
[FG cub.ad GB cub.,plus HG ad GC
[FN cub.ad RN cub:plus HN ad NS
[Plplanum ſub FN cub.in HN ad plplanum
[ſub RN cub: in NS

Er-

Ergo (9.5.) ſibi æquantur plplanum ſub cubo FN in NO & plplanum ſub RN cubo in NS,cui (*ut prius*)æquatur ququadratum applicatæ NM .Ergo ſibi æquantur ququadratum applicatæ NM, & plplanum ſub cubo FN in NO . Sed plplanum ſub cubo FN in NO , vel FX eſt id quod continetur ſub cubo abſciſſæ FN inParametrum FL, minus plplano ſub cubo FN, vel OX in XL, ad quam XL ita eſt abſciſſa FN,vel OX,ut diameter FHad Parametrum FL. Ergo patet Q.E.D.

SCHOLIUM.

Hæ autem curvæ *Ellipſes* vocentur,nam & in his quadrata , vel cubi , vel ququadrata applicatarum , &c, deficiunt, à planis, vel ſolidis, vel planoplanis , &c. quibus comparantur.

Quoniam verò & hæ *Ellipſes* indefinitæ ſunt,ideo numeris ordinalibus eaſdem deſignabimus.Quarè Apolloniana, vel quæ oritur ex ſectione primi coni, *Prima hujus Prop.* vocabitur, quæ verò oritur ex ſectione ſecundi coni *ſecunda hujus prop.*, & quæ ex tertii *Tertia* , & ita in infinitum eodem ordine.

Notandum hoc loco etiam eſt , allatam pro his curvis demonſtrationem unicam eſſe, atque omnino cum Apolloniana convenire paucis tantummodo immutatis , ut ſupra dictum eſt.

PROPOSITIO XVII.

(*Fig.* 14.)

*In Parabola prima prop.*8. *quadrata applicatarum EC, FD ſunt inter ſe, ut AE, AF abſciſſa ab ipſis. In ſecunda verò ejuſdem propoſ. Parabola cubi*

cubi applicatarum EC, FD, ſunt inter ſe, ut eædem abſciſſæ AE, AF. In tertia autem ejuſdem propoſitionis Parabola, ququadrata applicatarum EC, *FD ſunt inter ſe, ut eædem abſciſſæ AE, AF, & ita in infinitum in altioribus.*

Pro Prima Parabola, Parametro AG.

	[EC quad: ad FD quad: (*prop.* 8. *huius &* 7.5.)
Æquant: hæ Rat.	[Rectglum ſub AE, & AG ad Rectglum ſub AF, AG (1.6.)
	[AE ad AF, Q.E.D.

Pro ſecunda Parabola, Parametro AG.

	[EC cubus ad FD cubum (8.*hujus*, *&* 7.5.)
Æquant. hæ Rat.	[Solid. ſub AG quad. in AE, ad ſolid: ſub AG quad: in AF [32.11.]
	[AE ad AF. Q.E.D.

Pro tertia Parabola, Parametro AG.

	[EC ququad: ad FD ququad: (8. *hujus &* 7.5.)
Aquant. hæ Rat.	[Plplanum ſub AG cub. in AE ad plpla: ſub AG cub. in AF.
	[AE ad AF. Q.E.D.

PROPOSITIO XVIII.

(*Fig.* 14.)

In prima Parabola prop. 9. quadrata applicatarum EC, FD ſunt inter ſe, ut ab ipſis abſciſsæ AE, AF. In ſecunda Parabola ejuſdem 9. propoſ. ap.

applicatarum EC, FD cubi ſunt inter ſe, ut abſciſſarum AE, AF quadrata. In tertia denique Parabola ejuſdem propoſitionis ita ſunt inter ſe applicatarum ququadrata, ut abſciſſarum AE, AF cubi, & ita eodem ordine in infinitum.

Pro prima Parabola, cujus Parameter AG
[EC quad: ad FD quad. (7. 5. & 9. *hujus*)
[Rectglum ſub GA, AE ad rectglum ſub GA,
Æqu. hæ [AF (1. 6.)
Rat. [AE ad AF. Q.E.D.

Pro ſecunda Parabola, cujus Parameter AG
[EC cub: ad FD cub: (7. 5. & 9. *hujus*)
[Solid: ſub GA in AE quad: ad ſolid: ſub GA
Æqu. hæ [in quad: AF [31. 11.]
Rat. [AE quad: ad AF quad: Q.E.D.

Pro tertia parabola, cuius Parameter AG
[EC ququad: ad FD ququad: (7. 5. & 9. *hujus*)
[Plplan: ſub GA in AE cub: ad plplanum ſub
Æqu. hæ [GA in AF cub.
Rat. [AE cub: ad AF cub. Q.E.D.

PROPOSITIO XIX.

(Fig. 15.)

In primis Hyperbolis propoſit. 10., & primis Ellipſibus propoſ. 15. quadrata applicatarum DE, FG, ita ſunt ad rectgla contenta ſub lineis EB, EA, & GB, GA, ut Parameter AC ad diametr, AB. In Hyperbola autem intellige, AB eſſe rectũ inter oppoſitas hyperbolas interceptam. Quadrata

ta verò earundem applicatarum inter ſe ſunt, ut prædicta rectangula inter ſe.

In ſecundis verò Hyperbolis, atque Ellipſibus earundem propoſitionum, cubi applicatarum DE, FG ad ſolida ſub AE, & quadrato EB, ac ſub AG in quadratum GB, ut AC Parametri quadratũ ad quadratum AB, cubi verò inter ſe, ut prædicta ſolida.

In tertiis denique hyperbolis, atque ellipſibus earundem prop:, ita applicatarum DE, FG ququadrata ad plplana ſub AE, & cubo EB, & ſub AG in cubum GB, ut cubus Parametri AC ad cubum AB: ququadrata verò prædicta, ut ipſa plplana, & ita in infinitum.

Producantur DE, FG donec occurant BC productæ in punctis H,K; quare in prima hyperbola, & Ellipſi.

	[DE quad:ad rectglum AE, EB (10. *vel* 15. *hujus*, & 7.5.)
Æq.hæ Rat.	[Rectglum ſub AE,EH ad rectglum ſub AE, EB (1.6.)
	[EH ad EB (4.6.)
	[AC Parameter ad AB, & patet primum.
	[GK ad GB (1.6.)
	[Rectglum ſub GK in GA ad rectglum ſub GA in GB (7.5.& *prop.*10.*vel* 15.*hujus*
	[FG quad:ad rectglum ſub GA, GB

Atque(*alternando*)DE quadratum ad FG quadratum, u. rectglum ſub AE, EB ad rectglum ſub AG, GB. Q.E. ſecundo loco D.

In ſecunda hyperbola, & Ellipſi.

	[DE cub: ad ſolid. ſub AE, in BE quad.(7.5. & 10. *vel* 15.*hujus*)
Æqu. hæ Rat.	[Solid.ſub AE, in EHquad. ad ſolid: ſub AE in EB quad.

EH

[EH quad: ad EB quad:
[AC quad: ad AB quad: Q.E. primo loco D.
Æqu: hæ [GK quad:ad GB quad:
Rat. [Solid: ſub GK quad: in AG ad ſolid: ſub GB
[quad:in AG(10.& 15 *bujus* & 7. 5.
[Cub:FG ad ſolid: ſub AG in GB quad:

Atque[*alternando*]DE cub: ad FG cubum, ut ſolidum ſub AE in EB quadratum ad ſolidum ſub AG in GB quadratum. Q.E. ultimo loco D.

In Tertia hyperbola, & *Ellipſi.*

[DE ququad:ad plpla:ſub AE in EB cub:(7.5
[& 10, *vel* 15, *bujus.*
Æquant. [Solid. ſub AE in EH cub: ad plpl.ſub AE in
hæ Rat. [EB cub.
[EH cub.ad EB cub.
[AC cub.ad *AB* cub. Q.E. primo loco D.
[GK cub.ad GB cub.
[Plpla: ſub AG in GK cub. ad plplan. ſub AG
[in GB cub. (7.5.& 10, *vel* 15 *bujus*]
[FG ququad.ad plplan.ſub AG in GB cub.

Atque[*alternando*]DE ququadratũ ad FG ququadratum, ut plplanum ſub AE in EB cub; ad plplanum ſub AG in GB cub. Q.E. ultimo loco D.

RROPOSITIO XX.

(*Fig.* 15.)

In primis Hyperbolis prop. 11., & *primis Ellipſibus propoſ.* 16. *bujus, quadrata applicatarũ DE, FG ita ſunt ad rectangula ſub AE, EB, & ſub AG, & GB, ut Parameter AC ad rectã AB, quæ oppoſitas ſectiones interjacet, & earundem applica-*

tarum quadrata ſunt inter ſe, ut prædicta re-ctangula.

In ſecundis verò Hyperbolis, & Ellipſibus earundem propoſ. cubi applicatarum DE, FG ad ſolida ſub quadrato AE in EB, & ſub quadrato AG in GB, ut AC, ad AB, & cubi applicatarum ſunt inter ſe, ut prædicta ſolida.

In tertiis denique Hyperbolis, & Ellipſibus ita ſunt applicatarum ququadrata ad plplana ſub cubo AE in EB, & ſub cubo AG in GB, ut AC ad AB, & ita eodem modo in infinitum.

Si hyperbola, vel Ellipſis prima fuerit, patet ex antecedenti.

In ſecunda Hyperbola, & Ellipſi.

[DE cub. ad ſolid. ſub quad. AE in EB (7.5. & 11. *vel* 16. *hujus*)
Æquant. hæ Rat. [Solid. ſub AE quad. in EH ad ſolid. ſub AE quad. in EB
[EH ad EB
[AC ad AB Q.E. primo loco D.
[GK ad GB
[Solid. ſub GK in quad. GA ad ſolid. ſub GB in quad. GA (7.5. & 11. *vel* 16. *hujus*)
[Cub: FG ad ſolid. ſub GB in quad GA.

Atque [*alternando*] DE cubus ad cubum FG, ut ſolidum ſub quadrato AE in EB ad ſolidum ſub quadrato AG in GB. Q.*E.* ultimo loco D.

In tertia Hyperbola, & Ellipſi.

[DE ququad. ad plplanum ſub cub. AE in EB (7.5. & 11. *vel* 16. *hujus*)
Æquant. [Plplan. ſub AE cub. in EH ad plplan. ſub cub. AE in EB
hæ Rat. [EH ad EB (4.6.)

AC

[AC ad AB, & patet Q.E primo loco D.
[GK ad GB.
[Plapla.ſub Gk in cub.GA ad Plplan. ſub GB
[in cub.GA(7.5.& 11.uel 16.*bujus.*)
[FG cub. ad ſolid:ſub GB in cub.GA.

Atque[*alternando*] ut ququadratum DE ad ququadratum FG,ita plplanum ſub cubo AE in EB ad plplanum ſub cubo AG in GB Q.E.ultimo loco D.

L E M M A. *Fig.16.*

Recta linea AC indefinita ad partes V bifariã dividatur in D,atque infra D,ad partes V ſumatur quodlibet punctum, B, dico quadratum AB majorem habere rationem ad rectangulum ADB, quàm quadratum AC ad rectglum ADC.

Quòd ſi AC ita in D ſecta fuerit, ut AD dupla ſit DC,cubus AB ad ſolidũ ſub quadrato AD in DB in majori ratione erit, quàm cubus AC ad ſolidum ſub quadrato AD in DC.

Quòd enim quadratum AB maiorem rationem habeat ad rectglum ADB; quã quadratum AC,&c. ita patet. Dividatur AB bifariam in E; ergo rectglum AEB majus erit rectglo ADB;ac propterea in majori ratione erit quadratum AB ad rectglum ADB, quàm ad rectglum AEB. Sed (4.2.) ut quadratum AB ad rectglum AEB, ita quadratum AC ad rectglum ADC. Ergo quadratum AB ad rectglum ADB in majori ratione erit, quàm quadratum AC ad rectglum ADC. Q.D.E.

Quòd verò cubus AB ad ſolidum ſub quadrato AD in DC,&c. majorem rationẽ habeat, ita patet. Fiat ut AC ad AD,ita AB ad AE,ergo(*ex doctrina de Maximis,& Minimis*) ſolidum ſub quadrato AE in EB majus erit ſolido ſub

quadrato AD in DB, quare in majori ratione erit cubus AB ad ſolidum ſub AD quadrato in DB, quàm ad ſolidum ſub quadrato AE in EB. Sed ut cubus AB ad ſolidum ſub quadrato AE in EB, ita cubus AC ad ſolidum ſub quadrato AD in DC. Ergo cubus AB ad ſolidum ſub quadrato AD in DB in majori ratione erit, quàm cubus AC ad ſolidum ſub quadrato AD in DC. Q.E.D.

SCHOLIUM.

Eadem ratione ſi AC ita in D ſecta fuerit, ut AD ſit tripla, vel quadrupla,&c.ipſius DC demonſtrabitur ququadratum, vel qucubum, &c. AB in majori ratione eſſe ad plplanũ, vel plſolidum &c.ſub cubo,vel ququadrato AD in DB, quam ququadratum, vel quſolidum,&c. AC, ad plplanum, vel plſolidum ſub cubo, vel ququadrato AD in DC,& ita eodem modo in infinitum.

Idem dicendum,ſi AC ita in D ſecta fuerit, ut AD ſit ſubdupla,vel ſubtripla,&c.ipſius DC,nam hoc caſu cubus, vel ququadratum,&c,AB majorem haberet proportionem ad ſolidum ſub AD in quadratũ DB, vel ad plplanum ſub AD in DB cubum, quàm cubus, vel ququadratum AC ad ſolidum ſubAD in quadratum DC,vel ad plplanum ſub AD in cubumDC &c.quod monuiſſe ſufficiat.

PROPOSITIO XXI.

(Fig. 17.)

Si Parabola DEG prima fuerit prop.8. hujus, ſumtoque in ipſa quolibet puncto E, ducatur ab ipſo EC applicata ad diametrum DB, atque AD ſit æqualis DC inter verticem, & ordinatam EC, recta, quæ per puncta A, E, ducitur, parabolam in puncto E tanget.

Si

Si verò Parabola DEG fuerit ſecunda ejuſdem propoſitionis, & DA dupla DC, recta AE tanget in puncto E.

Si deniq; Parabola DEG fuerit tertia ejuſdem propoſ.8. & AD tripla DC, recta AE tanget in ſemper puncto E.

Eodem modo ſi DEG fuerit quarta Parabola, & DA quadrupla AC, & ſi DE fuerit quinta, & DA etiam quintupla DC, & ita in infinitum, AE erit tangens.

Ex quolibet puncto G applicetur ad diametrum DB recta GB occurrens AE productæ, ſi opus fuerit, in puncto F.

Pro Prima Parabola

Quoniam itaque recta linea AC indefinita ad partes V ſecta eſt bifariam in D, ſumptumque eſt punctum B infra D ad partes V, majorem rationẽ habebit quadratum AB ad rectglum ADB, quàm quadratum AC ad rectglum ADC, & *alternando*, in majori ratione erit quadratum AB ad quadratum AC, quàm rectglum ADB ad rectglum ADC, vel (1.6.) DB ad DC. vel (17. *hujus*) GB quadratum ad EC quadratum. Ergo quadratum AB ad quadratum AC, vel (4.& 22.6.) quadratum FB ad quadratum EC in majori ratione erit, quàm GB quadratum ad quadratum EC. Ergo quadratum FB majus eſt quadrato GB, ac propterea FG major GB: unde punctum F erit extra parabolam DEG. Q.E.D.

Pro ſecunda Parabola.

Quoniam recta AC indefinitè producta ad partes V ita in D ſecta eſt, ut AD dupla ſit ipſius DC, atque infra D ad partes V ſumptum eſt punctum B, cubus AB ad ſolidum ſub quadrato AD in DB majorem rationem habebit, quàm cubus AC ad ſolidum ſub eodem quadrat.

AD

AD in DC, & altern. cubus AB ad cubum AC majorem proportionem habebit, quàm ſolidum ſub quadrato AD in DB, ad ſolidum ſub quadrato AD in DC, hoc eſt quam DB, ad DC, vel [17. *hujus*] quam cubus GB ad cubum EC. Sed ut cubus AB ad cubum AC, ita cubus FB ad cubum EC. Ergo cubus FG majorem rationem habebit ad cubum EC, quàm cubus GB ad eundem cubum EC; ac propterea [10.5.] FB major erit GB, unde patet punctum F eſſe extra Parabolam. Q.E.D.

Pro tertia Parabola.

Quoniam AD tripla eſt ipſius DC, eodem modo *ex Lemmate ant.* ququadratũ AB maiorẽ habebit rationẽ ad ququadratũ AC, ſive ququadratũ FB ad ququadratũ EC, quàm plplanum ſub cubo AD in DB ad plplanum ſub cubo AD in DC, hoc eſt, quàm DB ad DC, vel (17. *hujus*] quàm ququadratum GB ad ququadratum EC. Ergo ququadratum FB ad ququadratum EC majorem proportionem habebit, quàm ququadratum GB ad ququadratum EC, ac propterea [10.5.] FB maior GB, & punctum F extra Parabolam. Q.E.D.

PROPOSITIO XXII.

(*Fig.* 17.)

Si Parabola DEG fuerit prima propoſ.9. hujus, et in ipſa ſumatur quodlibet punctum E, à quo applicetur EC ad diametrum DB abſcindens rectam DC, cui æqualis ponatur DA, & jungantur puncta A, E, recta AEF, hæc parabolam DEG in puncto E tanget.

Si verò Parabola DEG fuerit ſecunda ejuſdem propoſ.9. hujus, & DC fuerit dupla DA, AE erit tangens.

Quòd ſi Parabola DEG fuerit tertia, & DC *tri-*

tripla DA, AE erit etiam tangens, & ita eodem ordine in infinitum.

Si Parabola prima fuerit, demonſtratum eſt in antecedenti, AE parabolam tangere in puncto E.

Si verò Parabola ſecunda fuerit prop. 9. hujus, ita procedet demonſtratio. Quoniam AC indeſinitè producta ad partes V, ita ſecta eſt in D, ut AD ſubdupla ſit ipſius DC, atque in ipſa infra *D* ad partes V ſumptum eſt punctum B, majorem rationem habebit cubus AB ad ſolidum ſub AD in quadratum DB, quàm cubus AC ad ſolidum ſub AD in quadratum DC, atque *alter.* in majori ratione erit cubus AB ad cubum AC, vel FB cubus ad cubum EC, quàm ſolidum ſub AD in quadratum DB, ad ſolidum ſub AD in quadratum DC, vel quàm quadratum DB ad quadratum DC, vel [18. *hujus*] quàm cubus GB ad cubum EC. Ergo cubus FB ad cubum EC majorem rationem habebit, quàm cubus GB ad cubum EC, ac propterea [10.5.] FB major erit recta GB, & patet punctum F eſſe extra Parabolam. Q.D.E.

Si autem Parabola DEG fuerit tertia prop. hujus, eodem modò (*ex lemmate anteced.*) ququadratum AB ad quadratoquadratum AC, ſive ququadratum FB ad quadratoquadratũ EC majorem rationem habebit, quàm plplanum ſub AD in cubum DB ad planoplanum ſub AD in cubum DC, hoc eſt quàm ququad. DB ad ququad. DC, vel (18. *hujus*) quàm ququad. GB ad ququad. EC. Ergo in majori ratione erit ququad. FB ad ququad. EC, quàm quadratoquadratum GB ad quadratoquadratum EC. Ergo (10.5.) FB major erit GB, ac propterea punctum F erit extra Parabolam Q.D.O.

S C H O L I V M.

Ex his, quæ in medium attuli, facillima ſe prodit ratio, qua, cujuſcumque Parabolæ datæ tangentes in dato puncto invenire poſſibile eſſet, atque adeo ea omnia peragere

re, quæ ab Apollonio hac de re tradita ſunt: quæ quidem omnia ſilentio præterire viſum eſt, cùm quiſque proprio marte, nulloque negotio perficere poſſit.

PROPOSITIO XXIII.

(*Fig.* 18.)

Si in prima Hyperbolæ prop. 10. vel prima Ellipſi prop. 15. ſumatur aliquod punctum C, ab eoque recta linea CD ad diametrum BD ordinatim applicetur, & quam proportionem habent lineæ BD, & AD interjectæ inter ordinatim applicatã CD, & ſectionum vertices A, B, eandem habeant inter ſe, BE, AE partes diametri inter vertices, recta linea EC conjungens punctum E in diametro, & punctum C in ſectione, ſectiones ipſas continget.

Quòd ſi Hyperbola, aut Ellipſis ſecunda fuerit earundem propoſitionum; omnibuſque ut ſupra peractis, fiat ut BD ad 2 AD, ita BE ad EA, recta linea EC conjungens puncta E, C tangens ſectiones ipſas erit.

Et ſi Hyperbola, vel Ellipſis tertia fuerit earundem propoſitionum, & fiat ut DB ad 3 AD, ita BE ad AE, recta linea conjungens puncta E, C ſectiones continget.

Sumto quolibet puncto in CE, ut F, ordinatim applicetur FG ad diametrum BD, ſectioni occurrens in H, & per A, & B ducantur AL, BM ad EF parallelæ, & protrahantur CD, BM uſquedum ſibi mutuò occurrant in puncto K, ducantur etiam rectæ BCX, GCM; igitur

(ex

(29.1.& 4.6.] ſimilia erunt inter ſe triãgula CBE,&XBA; BCK,XCM; BCN,XCO. Atque hæc omnibus Hyperbolis, & Ellipſibus communia ſunt. Sed

In prima Hyperbola, & Ellipſi.

[BK ad AN (4.6.)
Æqu. hæ [BD ad AD (*hyp.*)
Rat. [BE ad EA (2.6.)
[BC ad CX
[BK ad NX.

Ergo (9.5.) ſibi æquantur AN, & NX; adeoque

[*Not.primò.*]Rectglũ ANX,ſive quadratum AN maius eſt rectglo AOX(ex doctrina de Maximis, & Minimis). Ac propterea majorem proportionem habet NX ad OX, quàm AO ad AN.

[*Secundò.*]KB ad BM eſt, ut NX ad OX; nam NO ad KM, ut OC ad CM, vel ut OX ad MB;ergo (*alternando, & componendo*) erit NX ad OX, ut KB ad BM. Ergo (ex nota 1.præced.]KB ad BM in majori ratione erit,quàm AO ad AN; quare rectglum ſub KB, & AN majus erit rectglo ſub BM, & AO.

[*Tertio.*]Quoniam AN ad CE,ita AD ad DE,& ut CE ad KB, ita ED ad DB, erit rectglum ſub AN in KB ad quadratum CE, ut rectglum ADB ad quadratum ED. Quare rectglum ADB ad quadratum DE, ut rectglum ſub KB, & AN ad quadratum CE. Sed rectglum ſub KB, & AN (ex not.2.) majus eſt rectglo ſub BM, & AO. Ergo majorem proportionem habet rectglum ADB ad quadratum DE, quàm rectglum ſub MB, AO ad quadratum CE,vel *ob ſimilitudinem triangulorum*, quàm rectglum ſub AG, & GB ad quadratum GE. Ergo (*altern.*) erit BDA ad BGA, vel (propoſitione 19.huius) quadratum CD ad quadratum GH in majori ratione,quàm DE quadratum ad EG, ſive, quàm CD ad FG. Ergo [10.5.] HG minor eſt FG, ac propterea punctum F eſt extra curvas. Q.D.E.

Pro tertia Hyperbola, & Ellipſi.

Sit ES dimidium S, item CV dimidium VX, ergo.

[BK ad AN (4.6.)
[BD ad DA (*hyp.*)
Æqu. hæ [BE ad ES (2.6,& *hyp.*)
*R*at. [BC ad CV (4 6.)
[Bk ad tertiam partem XN

Ergo (9.5.)XN tripla eſt ipſius NA ac propterea (*Not.Primò*) Plplanum ſub cubo NX in NA (*ex doctrina de maximis, & minimis*) majus erit plplano ſub cubo OX in OA; undè majorem proportionem habebit cubus NX ad OX cubum, quàm OA ad AN.

(*Secundò*) Ex ijs, quæ ſuprà demonſtrata ſunt, cubus KB ad cubũ MB, ut cubus NX ad OX cubũ. *E*rgo(*ex nota præced.*) cubus KB ad cubum MB in majori ratione erit, quàm AO ad AN: quare plplanum ſub cubo KB in AN majus erit plplano ſub cubo MB in AO.

(*Tertio*) Ex ſupra demonſtratis ita erit plplanum ſub AN in cubum KB ad ququadratum CE, ut plplanum ſub AD in cubum DB ad ququadratum DE. Quare plplanum ſub AD in cubum DB ad ququadratum DE majorem rationem habebit, quàm plplanum ſub AO in cubum MB ad ququadratum CE, vel quàm plplanum ſub AG in cubum GB ad plplanum GE. Undè (*altern.*) plplanum ſub DA in cubum DB ad plplanum ſub AG in cubum GB; vel (propoſitione 19.huius) ququadratum CD, ad ququadratum HG majorem proportionem habebit, quàm ququadratum DE ad ququadratum GE, vel quàm ququadratum *D*C ad ququadratum FG. *E*rgo (10.5.)HG minor eſt FG, & patet punctum F eſſe extra curvas. Q.*E*.*D*.

PROPOSITIO XXIV.

(*Fig.* 18.)

Si in prima Hyperbola prop. 11. *vel in prima Ellipſi prop.* 16. *ſumatur quodlibet punctum C, ab eoque applicetur CD ad diametrum AB, & quam proportionem habent rectæ* BD, *AD interjectæ inter applicatam CD, & ſectionum vertices A,B; eandem habeant inter ſe BE, EA partes diametri inter vertices; recta linea EC puncta conjungens, curvas in puncto C tanget.*

Si verò hyperbola, aut ellipſis ſecunda fuerit earundem propoſitionum, & fiat, ut DB ad dimidima partem AB, ita BE ad EA; recta EC hyperbolam, aut ellipſim continget.

Et ſi denique hyperbola, aut ellipſis fuerit tertia earundem propoſitionum, atque ſit BD ad tertiam partem AD, ita BE ad AE; recta EC tangens curvarum erit. Ita in infinitum eadem ratione operandum erit.

Omnibus enim, ut in prop. antecedenti, conſtructis, quando hyperbola, aut ellipſis eſt prima, patet propoſitum ex iis, quæ modò attulimus. Quando autem hyperbola, aut ellipſis eſt ſecunda, ita demonſtratur. Ob ſimilitudinem triangulorum, ut ſupra.

	[KB ad AN (4.6.)
Æquant.	[BD ad DA (*hyp*)
hæ Rat.	[BE ad 2EA [4.6.]
	[BC ad 2CX (4.6.)
	[BK ad 2XN

Ac

; propterea (7.5.) AN dupla erit ipſius NX. Unde (*Not.Primò.*) Solidum ſub quadrato AN in NX majus erit ſolido ſub quadrato AO in OX;atque adeo majorem proportionem habebit NX ad OX,quàm quadratum AO ad quadratum AN.

(*Secundò*) Quoniam' ex iis, quæ in anteced:prop:dicta, & demonſtrata ſunt, ita eſt KB ad BM , ut NX ad OX, erit KB ad BM in majori ratione, quàm quadratum AO ad quadratum AN, ac propterea ſolidum ſub quadrato AN in kB majus erit ſolido ſub quadrato AO in BM.

(*Tertiò*) Ita eſt ſolidum ſub quadrato AN in KB ad cubum CE,ut ſolidum ſub quadrato AD in DB ad cubum *D*E.Ergo[ex not.2.]ſolidũ ſub quad.AD in BD ad cubũ DE majorem proportionem habebit, quàm ſolidum ſub quadrato AO in MB ad cubũ CE, vel quàm ſolidum ſub quadrato AG in GB ad cubum GE.Ergo (*altern.*)ſolidum ſub quadrato *A*D in *D*B majorem proportionem habebit, ad ſolidum ſub quadrato AG in GB, vel (20.*prop. hujus*) cubus CD ad cubum HG majorem proportionem habebit, quàm cubus E*D* ad cubum *E*G, vel quàm cubus CD, ad cubumFG.Ergo (10.5.]HG minor eſt FG,ac propterea punctum F erit extra hyperbolam,aut ellipſim. Q.E.D.

Pro tertia Hyperbola, aut Ellipſi.

Omnibus ut ſupra conſtructis, facillimè demonſtrabitur AN triplam eſſe ipſius NX. Quare.

(*Not.Primò*) Plplanum ſub cubo AN in NX majus erit plplano ſub cubo AO in OX, unde majorem proportionem habebit XN ad XO, quàm cubus AO ad cubum AN.

(*Secundò*) Quoniam, ut ſupra demonſtratum eſt, ita KB ad BM, ut NX ad OX, erit etiam (*ex not. anteced.*) KB ad BM in majori ratione, quàm cubus AO ad cubum AN: quare plplanum ſub KB in cubum AN majus erit plplano ſub MB in cubum AO.

(*Tertiò*)Ita eſt plplanum ſub cubo AN in kB ad ququadratum CE,ut plplanũ ſub cubo AD in DB ad ququadratum

tum DE Ergo(*ex not.2.præced.*)plplanum ſub cubo AD in DB ad ququadratum DE majorē rationē habebit,quàm plplanum ſub cubo AO in MB ad ququadratum CE, ve quàm plplanum ſu b cubo AG in GB ad ququadratum GE Ergo (*alternando*) plplanum ſub cubo AD in DB ad plplanum ſub cubo AG in GB,vel (20.*huius*) ququadratum CD ad ququadratum HG majorē rationem habebit,quàm ququadratum ED ad ququadratum EG,ſive quàm ququadratum CD ad ququadratum FG;ac propterea FG (10.5.) major erit HG.Unde punctum F erit extra propoſitas curvas.Q.E.D

S C H O L I V M.

Atque quatuor his propoſitionibus ea omnia demonſtrata ſunt, quibus ad inveniendas tangentes omnium Parabolarum, Hyperbolarum, atque Ellipſium opus eſt. Quæ cùm literis mandaſſem, in ea incidi, quæ habentur in *Geometrica* Exercitat ion e ardinalis Michaelis Angeli Riccii, eximii ſanè GeCoetræ; in qua ea quæ ad tangentes ſpectant, methodomparùm à mea diverſa explicata offendi. An verò in iis, quæ meditatum ſe ait de infinitarum curvarum geneſi,quidquam cum meis inventis commune fueram divinare nō poſſum;nullus ſiquidem,quem ſciam, illa vidit unquam; nec ſatis ex eius verbis colligi poteſt; ait enim loco citato: *Quare pergimus ad reliqua uſum præſtantiſſimum habentia ad inveniendas plurium linearum tangentes,figurarum centra gravitatis,& quadraturas,& ad alia,item multa, quæ juſto ſervamus operi; ubi dabimus novam ſolidorum conicorum ſeriem, qui ſecti exhibent infinitas; uti vocant, hyperbolas, infinitas parabolas,infinitas ellipſes, & analogiam ſervando circulos etiam infinitos.* Maximè autem lætarer, ſi quid mihi cum tanto viro commune eſſet. Quid enim mihi iucundius accidere poſſet, quàm ea ſub prima iuventute excogitaſſe,quæ viro doctiſſimo,jamque ſeni, in mentem veniſſent!

PRO-

PROBL. I.

Fig. 19.

Sit data recta AB, quæ debeat eſſe diameter cujuſcumque ex parabolis, ita ut A ſit vertex, Parameter autem recta Z, applicatæ autem in dato angulo, oportet quæſitam parabolam in plano, in quo eſt recta AB, delineare.

In ſubiecto plano, in quo eſt AB, excitetur planum ipſi perpendiculare incedens per rectam AB, quod ſit FDE. Tum in ſubiecto plano ducatur recta VA faciens cum AB angulum VAB æqualē dato, vel ipſius ad duos rectos, complemento. Ex puncto deinde A in plano in ſublimi agatur recta AC faciens cum AB angulum CAB æqualem duabus tertiis duorum rectorum, & ponatur AC æqualis datæ rectæ Z. Tum ſupra AC in plano in ſublimi, conſtituatur triangulum æquilaterum DAC; & per VA, AC ducatur planū, in quo deſcribatur circulus AOC, aut primus, aut ſecundus, prout opus fuerit: cuius quidē circuli diameter ſit AC. Vertice deinde D, circulo AOC, conus deſcribatur DAOC indefinitè productus ad partes EF & per punctum B in plano in ſublimi ducatur recta FBE parallela ipſi AC; item in ſubiecto plano ducatur recta GBH parallela ipſi VA. Ergo [15.11.] planum per rectas GH, FE parallelū erit plano AOC, ac propterea [4.*hujus*] ſectionē faciet in cono ADC producto eiuſdē naturæ, atq; eſt circulus AOC. Quia igitur planū in ſublimi DFE perpēdiculare eſt ad ſubiectū planum, in quo eſt AB, recta CA perpendicularis erit ad VA, & quoniam [*hyp.*] VA ipſi GB, FB ipſi CA parallela eſt, erit (10.11.) angulus FBG rectus. Planum autem ſubiectum ſectionem faciat GAH. Dico hanc eſſe parabolam quæſitam iuxta deſcriptum circulum. Sit enim circulus FGE ſecundus, ita ut ſolidum ſub qua-

dra-

Digitized by Google

drato EB in BF ſit æquale cubo ordinatæ GB;dico ſectionem GAH ſecundam Parabolam prop.8,huius fore. Quoniã enim ſecundus conus DFE ſectus eſt plano per axem, & per diametrum AC, ſive (4.*bujus*) FE,ſecatur item (*hyp.*)altero plano GAH ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam GH, quæ perdendicularis eſt ad diametrum FE, & ſectionis diameter AB æquidiſtat DE uni laterum trianguli per axem, nam angulus CAB æquatur angulo ACD;quilibet enim æquatur duabus tertiis duorum recto rum;erit ſectio GAH parabola ſecunda *prop.8.bujus*, cuius vertex A, diameter AB, applicatæ autem omnes ipſi GB parallelæ in dato angulo.Parameter autẽ erit recta linea,ad cuius quadratum ita erit quadratum DA, ut cub. s FE ad ſolidum ſub quadrato DF in DE, ſed cubus FE æquatur ſolido ſub quadrato DF in DE.Ergo quadratũ D æquatur quadrato Parametri,quare DA,vel (*hyp.*) AC ve Z erit Parameter. Unde factum eſt. Q.E.F.

P R O B L. II.

Fig. 20.

D*ata recta linea AB in plano FBH, Hyperbolam quamcumque in eodem plano invenire,ita ut data AB ſit diameter inter oppoſitas Hyperbolas interjecta, Parameter autem ſit data recta BC: applicatæ verò ſint in angulo dato VBA.*

In ſubjecto plano FBH excitetur planum perpendiculare IDO, atque ex puncto B erigatur in quolibet angulo rect a BC æqualis Parametro, jungaturque AC. Tum in plano in ſublimi IDO ducatur recta DE parallela ipſi AB, itaut æquentur BE, ED, quod ita facilè eſt, ut demonſtrationem afferre neceſſe non ſit, jungaturque BD.Deinde in ſubiecto plano FBH ducatur recta VB datum angulum

guam cum AB conſtituens, atque per VB, BC planum agatur, in quo circulus deſcribatur, prout opus fuerit, cujus diameter ſit BC. Tum vertice D, baſi autem circulo BSC conus deſcribatur DBSC indefinitè productus ad partes I, O. Dico hunc conum talem eſſe, ut ſectio facta in ipſo à plano FBH ſit quæſita hyperbola; cujus diameter BA, Parameter BG, applicatæ autem in dato angulo.

Oporteat enim quæſitam Hyperbolam eſſe ſecundam propoſ. 11. hujus.

Sit itaque circulus BSC ſecundus, ita ut ſolidum ſub quadrato BE in EC æquetur cubo applicatæ SE. Tum ſumpto quolibet puncto infra B, ut G. Ducatur in plano in ſublimi recta IGO parallela BC; item in ſubjecto plano recta FGH parallela VB. Quoniam itaque FG ipſi VB, & IO ipſi BC parallela eſt; erit [15.11.] planum ductum per IO, FG parallelum plano baſis coni BSC, & propterea [4. *huius*] circulum efficiet ejuſdem quidem naturæ, atque eſt circulus baſis, cuius diameter erit IO. Item quia planum IDO rectum eſt ad planum FBH, erit BC perpendicularis ad rectam BV, quare [10. 11.] FG erit etiam perpendicularis ad IO. Unde ſolidum ſub quadrato IG in GO æquabitur cubo rectæ FG. Quoniam itaque conus ſecundus DIO ſecatur plano DIO per axem, & per diametrum IO, ſecatur autem & altero plano FBH, ſectionem faciente FBH, cuius diameter BG æquidiſtat [*hyp.*] rectæ DM à coni vertice ad diametrum circuli baſis IO, erit ſectio FBH, quæ hyperbola dicitur, cujus diameter erit BG, quæ verò inter oppoſitas hyperbolas interiicitur, erit recta AB. Quòd verò ſit ſecunda propoſ. 11. cujus Parameter data BC, ita patet. Sumpto in hac hyperbola quolibet puncto, ut L, applicetur LR & per R ducatur NQ parallela IO. Quoniam itaque NQ ipſi BC, & RL ipſi FG, vel VB parallela eſt [15.11.] erit planum ductum per NQ, RL parallelum plano IFO, ac

propterea ſectio NLQ ſecundus circulus erit. Quare ſolidum ſub quadrato NR in RQ æquabitur cubo LR. Quoniam autem [ex hyp.] DE æquatur EB, erit etiam [4. 6.] BR æqualis RN; unde ſolidum ſub quadrato abſciſſæ BR in RQ æquabitur cubo applicatæ RL. At ſolidū ſub quadrato abſciſſæ BR in RQ eſt id, quod continetur ſub quadrato BR in BC, vel [34.1.] RP, unà cum alio ſolido ſub eiuſdem abſciſſæ quadrato in PQ; ad quam PQ ita eſt abſciſſa BR, vel CP, ut AB ad BC. Quare [11. *hujus*] ſectio FBH hyperbola ſecunda prop. 11; erit, cujus Parameter BC, applicatæ verò in dato angulo VBG, vel VBA. Q.E.F.

PROBL. III.

(*Fig.* 21. 22. & 23.)

CUM hujus problematis ſolutionem diverſam ab Apolloniana inveſtigarem, in aliam veritatem incidere mihi contigit, videlicet fieri poſſe, ut ſectio Cylindrica ſit etiam Ellipſis quæcumque, modò diverſos Cylindros imaginemur baſes habētes circulos ſupra expoſitos. Quare lubet propoſitum ſolvere problema, conis, atque cylindris adhibitis; ab his enim, quæ afferam, quāvis pauca, quæ de quorumcumque cylindrorum ſectionibus dici poſſunt, manifeſtè apparebūt. Hoc autem præmonere inutile non erit, ſi cylindrus, quemcūque circulū pro baſi habēs, plano ipſis baſibus parallelo ſecetur, ſectionē eſſe circulum eiuſdem quidem naturæ, atque ſunt baſium circuli. Id autem ex ipſa cylindri geneſi patet. Hoc itaque præmiſſo.

Oporteat datis duabus rectis lineis AB, AC Ellipſim quamcumque invenire, cuius diameter ſit AB, Parameter AC, applicatæ in datis angulis, oporteat autem inveniendam Ellipſim eſſe in plano, in quo eſt AB:

In ſubiecto plano, in quo eſt AB, excitetur planum perpendiculare DEB, vel(*fig.*23.) DABC; in hoc deinde plano in ſublimi ducatur recta BD, quemlibet angulum faciens cum AB, ſitque BD æqualis BA, iungaturque DA. Tum ex puncto A in ſublimi plano ducatur AG parallela BD, atque æqualis dato Parametro, iungaturque BC. Aut itaque rectæ DA, BC ſupra AC, aut infra convenient, aut parallelæ erunt. Si conveniunt, ducta BG in dato plano faciente datū angulū cū AB, æqualem nempe ei, quē applicatæ conſtituunt, per rectas BG, DB planū ducatur *D*O*B*, in quo circulus deſcribatur, cuius diameter *D*B, iuxta *E*llipſim quæſitam. Vertice deinde *E*, circulo *D*OB, conus deſcribatur *E*DOB. Si autem non conveniūt rectæ *DA*, BC in plano DOBG circulus DOB deſcribatur, cujus diameter DB, & ſuper hunc circulum Cylindrus conſtituatur, cuius latera rectæ DA, BC. Dico ſectionem AL*B* facta à ſubiecto plano, in quo eſt AB, in conis Ellipſim eſſe, cuius diameter A*B*, Parameter AC applicatæ autem in dato angulo. Oporteat enim quæſitam Ellipſim eſſe ſecundam propoſitionis 16.*hujus*. Circulus DO*B* huius ſit naturæ, ut ſolidum ſub quadrato DT in T*B* æquetur cubo TO. Et ſumto quolibet puncto in ſectione, ut L, applicetur recta LI ad diametrum A*B*, & per I ducatur SV parallela D*B*, & per SV, LI planum ducatur, quod parallelum erit plano DO*B*; etenim LI parallela eſt *B*G, ac propterea ſectio SLV circulus erit eiuſdem naturæ, atque eſt baſis circulus, cuius diameter SV. Item quia planum DAC*B* rectū eſt ſubiecto plano AL*B*, erit G*B* perpendicularis ad D*B*, ac propterea (10.11.) & LI perpendicularis erit ad diametrum SV, atque adeo ſolidum ſub quadrato SI in IV æquabitur cubo applicatæ IL. Quoniam autem ut eſt [4.6.)*DB* ad *B*A, ita eſt SI ad IA, & D*B* (*hyp*) æquatur *B*A; ergo SI æquabitur IA, unde ſolidum ſub quadrato abſciſſæ AI in IV æquabitur cubo applicatæ LI. Sed ſolidum ſub quadrato abſciſſæ AI in IV æquatur ſoli-

do ſub eiuſdem abſciſſæ AI quadrato in AC,minus ſolido ſub ejuſdem abſciſſæ AI in AF, ad quam AF ita eſt abſciſſa AI, ut diameter *B*A ad AC. *Ergo* (*16.hujus*) patet ſectionem ALB in utroque cono EBD, ellipſim 16. *prop.hujus* eſſe, cujus diameter AD, Parameter AC, applicatæ autem in dato angulo A*B*G, nam LI parallela eſt ipſi *B*G; quare factum erit, quod erat faciendum.

Sectio autem in cylindro ACCB facta ſecundus circulus erit, quandoquidem ſolidum ſub quadrato AI, in IV æquatur ſolido ſub quadrato AI in I*B*. Quarè ſolidum ſub quadrato AI in I*B* æquabitur cubo applicatæ IL, & patet fieri poſſe, ut ſectio cylindri ſcaleni ſit etiam circulus ejuſdem naturæ, atque eſt circulus baſis.

Ita autem ex cylindro ellipſis quæcumque erui poteſt [*fig.*24.]

Sit, ut ſupra.in plano,in quo eſt A*B* deſcribenda ſecunda ellipſis prop.16.huius; cuius diameter ſit A*B*, parameter AC applicatæ in dato angolo A*B*G. In plano, in quo eſt A*B* erigatur planum perpendiculare DF*B*A incedens per datam A*B*. Tum fiat ut CA ad *B*D, ita *B*D quadratum ad *B*A quadratum, & connectatur *B*D ad quemlibet angulum cum A*B* in plano in ſublimi. Item per *B*D, *B*G ducatur planum DO*B*, in quo deſcribatur circulus DO*B*, cujus diameter D*B*, ita ut ſolidum ſub quadrato DT in T*B* æquetur cubo applicatæ TO. Deinde ſuper hunc circulum conſtruatur cylindrus DAF*B*, cuius unum laterum ſit recta, quæ jungit puncta DA.Dico ſubjectum planum, in quo eſt A*B*,ſectionem facere AL*B*,quæ ſecunda ellipſis erit, ita ut cubus cuiuſcumque applicatæ LI æquetur ſolido ſub abſciſſæ AI quadrato in AC, minus ſolido ſub eiuſdem abſciſſæ AI quadrato in RC, ad quam eandem habet proportionem abſciſſa AI, quam diameter A*B* ad AC. Sumpto quolibetpuncto, ut L, ab eodem applicetur LI, & per I in ſubiecto plano ducatur SV, ergo(15 11) planum per SV, IL parallelum erit plano baſis cylindri

DBO

DOB, unde ſectio SLV circulus erit eiuſdem naturæ, atque eſt baſis circulus, atque [10, 11.] LI perpendicularis erit ad SV, quæ SV erit diameter circuli, unde ſolidum ſub quadrato SI in IV æquabitur cubo IL. Quare conſtructa figura, ut apparet, erit.

	[Solid. ſub quad. AI in IB ad ſolid. ſub AI quad:
	[in IQ
	[BI ad IQ (4.6.)
Æquant.	[BA ad AC (*hyp.*)
hæ Rat.	[AB cub. ad DB cub:
	[AI cub. ad IS cub. (30. *lib.6. Eucl.* Borel.
	[AI quad. ad IS quad: plus AI ad IS (4.6.)
	[AI quad: ad IS quad. plus BI ad IV.
	[Solid. ſub AI quad. in BI ad ſolid: ſub IS quad:
	[in IV.

Ergo [7.5.] ſibi æquantur ſolidum ſub quadrato AI in IQ, & ſolidum ſub quadrato SI in IV, cui (*ut prius*) æquatur cubus IL; Ergo patet ſolidum ſub quadrato abſciſſæ AI in IQ. æquari cubo applicatæ IL. Sed ſolidum ſub quadrato AI in IQ æquatur ſolido ſub quadrato abſciſſæ IA in AC, minus ſolido ſub quadrato eiuſdem abſciſſæ IA in RC, ad quam RC eandem proportionem habet abſciſſa *A*I, vel QR, quàm diameter AB ad AC. Ergo patet ſectionem ALB eſſe ellipſim propoſitionis 16. huius, cuius diameter eſt AB, Parameter AC, applicatæ verò in dato angulo ABG. Q.E.F.

Atque hæc ſatis ſint ad ea omnia demoſtranda, quæ de quorumcumque cylindrorum ſectionibus dici poſſunt; tam cum ſectio eſt circulus, quàm ellipſis; quicumque enim ea benè perceperit, quæ de ellipſibus prop. 13. 14. 15. & 16. huius ſupra demonſtrata ſunt, facillime, & hæc intelliget; etenim & ipſa demonſtratio in omnibus ellipſibus tam prop. 15., quàm prop. 16. huius, eadem fere eſt, atque à modo allata deduci poteſt.

Quarè non ſolum Apollonius longè, lateque Promotus mihi

mihi eſt, ſed Serenus ipſe, quod ultimæ laudis nõ eſſe, vel ipſos detractores fateri omnino neceſſum eſt. Maximas interim eis gratias ago, quandoquidem ipſis me falsò criminantibus impulſus, ea peregi, quæ nunquam fieri poſſe putaveram, videlicet, ut ex horum, quos inveni, conorum ſectionibus tam elegantes haberi poſſent cujuſcumque generis curvæ.

FINIS.

Digitized by Google